



## МОДЕЛЬ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ СОЛНЕЧНЫХ ПРОТОННЫХ СОБЫТИЙ И РЕНТГЕНОВСКИХ ВСПЫШЕК

Ю.П. Очелков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладной геофизики имени академика Е.К. Федорова, Москва, Россия*

В работе проводится исследование вероятностной зависимости между величинами, распределенными по степенному закону. Наиболее полная информация о вероятностной зависимости может быть получена построением двумерного распределения исследуемых величин. Однако, в нашем случае это не возможно из-за ограниченного статистического материала. В данной работе показывается, что особенности двумерного распределения могут быть получены на основе изучения степенных одномерных распределения и их взаимосвязи. Метод реализован для следующих величин: интенсивность в максимуме протонных событий с энергиями протонов больше 30 МэВ, поток в максимуме рентгеновских вспышек в диапазоне длин волн 0.1-0.8 нм (по данным КА GOES). Корреляционный анализ в данном случае не применим из-за степенного распределения величин, и отсутствия возможности наблюдать большое число протонных событий с интенсивностью меньшей фоновой. Найдены закономерности вероятностной зависимости, которые следует использовать при прогнозе протонных событий по рентгеновскому излучению вспышек и при исследовании особенностей ускорения частиц в солнечных вспышках.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** СОЛНЕЧНЫЕ ПРОТОННЫЕ СОБЫТИЯ, РЕНТГЕНОВСКИЕ ВСПЫШКИ СОЛНЦА, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ИНТЕНСИВНОСТИ, УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.

**DOI:** 10.54252/2304-7380\_2021\_31\_29

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование зависимости между интенсивностями в максимуме события (далее пиковыми интенсивностями) солнечных протонных событий (СПС) и мягкого рентгеновского излучения солнечных вспышек представляет как практический интерес (разработка методов прогноза протонных событий [1,2]), так и научный интерес: исследование особенностей генерации ускоренных частиц (протонов и электронов) в солнечных вспышках. Очевидно, что такая зависимость носит вероятностный характер. Однако корреляционный анализ в данном случае не применим по двум причинам. Во-первых, большая часть протонных событий после рентгеновских вспышек не наблюдается, так как их интенсивность в максимуме меньше фона для СПС, который не имеет никакого отношения к вспышечной активности Солнца, поэтому следует предположить, что такие события тоже протонные события, но не наблюдаемые. Во-вторых, распределения по пиковым интенсивностям являются степенными, и к ним корреляционный анализ, вообще говоря, не применим. Поэтому следует применять другие подходы к нахождению зависимости. В данной работе предполагается использовать вероятностный подход, основанный на исследовании одномерных распределений исследуемых величин и их взаимосвязи. Впервые такой подход использовался в работе [3] (см. также [4]) для установления зависимости между пиковой интенсивностью микроволновых всплесков Солнца  $YU$  типа и пиковой интенсивностью протонных событий, но он не являлся достаточно строгим. В данной работе рассматривается гораздо более строгий подход к исследованию

зависимостей между величинами, распределенными по степенному закону. Такие распределения, очень часто встречаются в астрофизике и, в частности, в физике Солнца. В работе [5] они связываются с фрактальными структурами. Характерная особенность таких распределений заключается в том, что среднее значение распределения никак не характеризует его, а связано либо с наибольшими событиями, которое могут не наблюдаться из-за ограниченной статистики, либо с минимальными событиями, наблюдение которых определяется величиной фона. Таким образом, нет характерного масштаба для таких распределений, и их принято называть безмасштабными [5].

Распределения солнечных событий по интенсивности, связанные с солнечными вспышками, исследовались в целом ряде работ. Их исследование позволяет определить зависимость между количеством ускоренных во вспышках электронов и протонов [3, 6], определить гелиодолготную зависимость СПС [7] и ее зависимость от цикла [8], исследовать направленность рентгеновского и радиоизлучения солнечных вспышек [9, 10]. В данной работе исследование распределений по пиковой интенсивности мягких рентгеновских вспышек (длины волн 0.1–0.8 нм) и СПС (с энергиями протонов больше 30 МэВ) и их взаимосвязи будет использовано для определения особенностей условной вероятности наблюдения протонного события после рентгеновской вспышки, определения средней интенсивности протонного события после рентгеновского всплеска заданной интенсивности, величины разброса этих интенсивностей, а также для нахождения зависимости между числом ускоренных быстрых электронов ответственных за жесткие рентгеновские вспышки и протонов с энергиями в десятки МэВ, вышедших в межпланетное пространство.

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИКОВЫХ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ РЕНТГЕНОВСКИХ ВСПЫШЕК СОЛНЦА И СОЛНЕЧНЫХ ПРОТОННЫХ СОБЫТИЙ

Распределения многих событий связанных с солнечными вспышками являются степенными (см., например, [5, 11]). Степенные распределения пиковых интенсивностей мягких рентгеновских вспышек Солнца и СПС рассматривались в целом ряде работ. Для нахождения вероятностной зависимости очень важным является нахождение как можно более точного значения показателя степени степенных распределений. Хотя наличие степенных распределений этих величин и их независимость от цикла и фазы цикла не вызывает сомнения, тем не менее точные значения показателей степени этих распределений нельзя считать окончательно установленными. В работе [12] рассмотрены распределения для 3-ех циклов и получено для показателя степени дифференциального распределения мягких рентгеновских вспышек  $\alpha$  значение 2.19 и для показателя степени дифференциального распределения по пиковой интенсивности СПС с энергиями протонов больше 10 МэВ значение  $\beta=1.34$  (для СПС с энергией протонов больше 100 МэВ получено значение  $\beta=1.46$ ). В работе [13] получено для  $\beta$  значение  $1.15 \pm 0.1$ . В работе [3] для  $\beta$  найдено значение  $1.45 \pm 0.15$ , а в [14] найдено для протонов с энергией больше 10 МэВ значение  $\beta=1.37 \pm 0.12$ . Поэтому построим распределения по интенсивности в максимуме для вспышек мягкого рентгеновского излучения и событий СПС, используя метод исключаящий ошибки по оси X.

### 2.1 Распределение рентгеновских вспышек по пиковой интенсивности

Распределение будем строить в логарифмических координатах, поскольку рассматриваемый диапазон изменения интенсивностей составляет два порядка величины от  $10^{-5}$  Вт/м<sup>2</sup> до  $10^{-3}$  Вт/м<sup>2</sup> (M и X вспышки). Данные по вспышкам меньшей интенсивности, B и C вспышкам, не использовались при построении распределения по двум причинам. Во-первых, вспышки такой интенсивности чрезвычайно редко сопровождаются протонными событиями, поэтому не представляют интереса для исследования взаимосвязи интенсивности рентгеновских вспышек и протонных событий. Во-вторых, из-за флуктуаций фона рентгеновского излучения, часть этих всплесков не наблюдается, особенно в годы максимума солнечной активности.

Распределение будем строить для всплесков от всего диска для статистической обеспеченности результатов. Кроме того, есть все основания полагать, что функции распределения для мягких рентгеновских всплесков не зависят от гелиодолготы всплесков, так как рентгеновское излучение является тепловым и изотропным, и источники излучения являются оптически тонкими в рентгеновском диапазоне. В работе [9] было проведено изучение направленности мягких рентгеновских всплесков и показано, что анизотропия излучения отсутствует. Там же было впервые

показано, что функции распределения по интенсивности в максимуме мягкого рентгеновского излучения не зависят от гелиодолготы.

Здесь рассмотрим подробно способ построения дифференциальных распределений по интенсивности в максимуме для вспышек рентгеновского излучения баллов больше М1 в диапазоне длин волн 1–8 Å для 23 и 22 циклов солнечной активности (СА). Для построения распределения (при логарифмической шкале по оси абсцисс) диапазон изменения интенсивности в один порядок величины был разбит на пять интервалов так, чтобы ширина каждого интервала в логарифмических координатах была примерно одинаковой. При этом границы интервалов  $x_i$  являются целыми степенями (от 0 до 10) числа  $\sqrt[5]{10}$  ( $x_i = (\sqrt[5]{10})^i$ ). Весь диапазон интенсивностей М и X всплесков при этом разбивается на 10 интервалов ( $i=1, 2 \dots 10$ ): [М1-М1.6), [М1.6-М2.5), [М2.5-М4), [М4-М6.3), [М6.3-М10), [Х1-Х1.6), [Х1.6-Х2.5), [Х2.5-Х4), [Х4-Х6.3), [Х6.3-Х10). Для каждого интервала подсчитывалось количество вспышек  $n_i$  по каталогу рентгеновских вспышек [15], число которых составляет 1584, 834, 531, 328, 200, 120, 58, 49, 23, 13 для 23 и 24 циклов СА.

Для построения дифференциальной функции распределения эти величины следует разделить на ширину интервалов в прямых координатах  $x_i - x_{i-1}$ , которые различны и равны: 0.6, 0.9, 1.5, 2.3, 3.7, 6, 9, 15, 23, 37, при этом мы получим значения функции распределения  $\bar{y}_i$  для каждого диапазона:  $\bar{y}_i = \frac{n_i}{x_i - x_{i-1}}$ . Найдем теперь значения  $\bar{x}_i$  соответствующие данным  $\bar{y}_i$ . Обычно при построении функции распределения значения  $y$  относятся ко всему диапазону интенсивностей, для которых они рассчитывались, при этом ошибка по оси  $x$  равняется ширине соответствующего диапазона ( $x_i - x_{i-1}$ ). Метод построения функции распределения, предлагаемый здесь, позволяет свести ошибку по оси  $X$  к нулю. Он заключается в следующем. Поскольку распределение вспышек по интенсивности является степенным, причем, как показало дальнейшее исследование, показатель степени для дифференциальной функции распределения равен примерно 2.1, то будем полагать, что и для каждого выбранного интервала интенсивностей можно считать распределение степенным с показателем примерно равным 2. При этом в каждом интервале интенсивностей распределение вспышек равно (нормировка на  $n_i$ :  $n_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx$ , где  $y(x)$  – степенное распределение с показателем равным 2):

$$y(x) = \frac{n_i x_i x_{i-1}}{(x_i - x_{i-1}) x^2} \tag{1}$$

Отсюда, подставив выражение для  $\bar{y}_i$ , найдем значение  $\bar{x}_i$ , соответствующее  $\bar{y}_i$ :

$$\bar{x}_i = \sqrt{x_i x_{i-1}}$$

В таблице 1 представлены рассчитанные значения  $\bar{y}_i$  и  $\bar{x}_i$

Таблица 1. Данные для 22 и 23 циклов СА для построения функции распределения рентгеновских вспышек по пиковой интенсивности.

$\lg \bar{x}_i$	0.11	0.31	0.51	0.71	0.91	1.11	1.3	1.51	1.7	1.91
$\lg \bar{y}_i$	3.42	2.97	2.55	2.15	1.73	1.30	0.806	0.514	0	-0.455

На рисунке 1 приведено дифференциальное распределение по пиковой интенсивности вспышек 22 и 23 циклов со статистическими ошибками по оси  $Y$ . Показатель степени этого распределения равен 2.13, что близко к значению 2.19 работы [12].

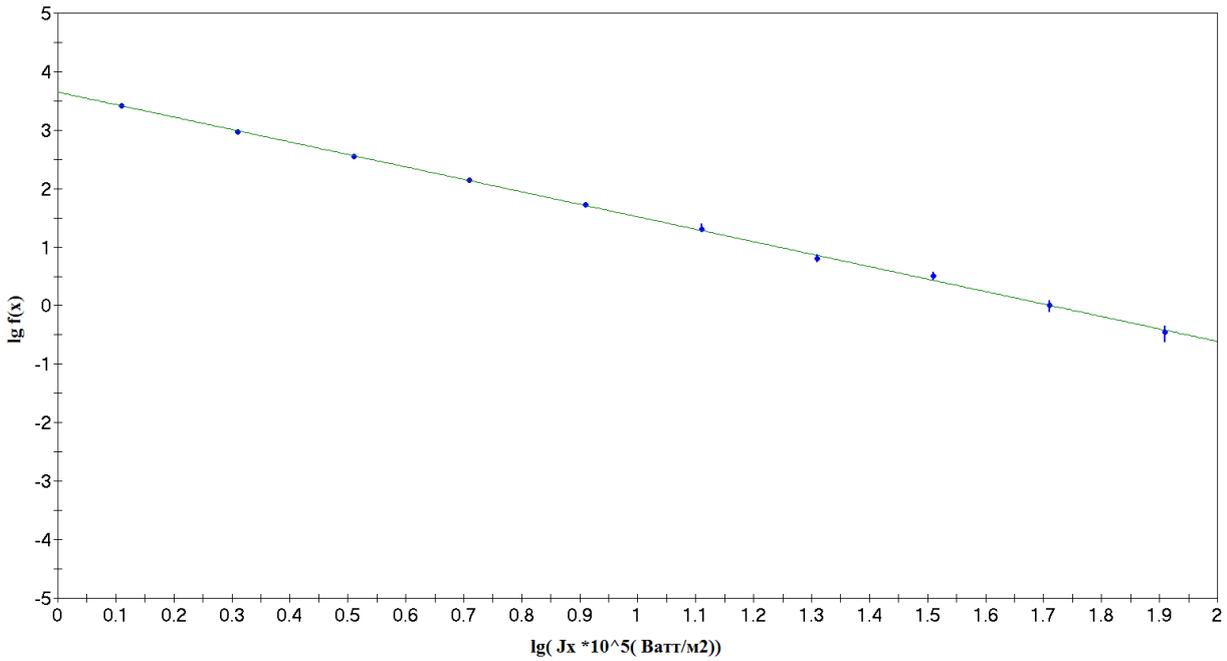


Рис. 1. Дифференциальная функция распределения по пиковой интенсивности для рентгеновских всплесков 22 и 23 циклов (весь диск). Прямая линия соответствует показателю степени 2.13

### 2.2 Распределение событий СПС для энергий протонов больше 30 МэВ по пиковой интенсивности

Для построения распределения по интенсивности в максимуме событий СПС были использованы данные по событиям СПС с энергиями протонов больше 30 МэВ. Использованы данные с КА GOES. Рассматривались все события с потоком в максимуме больше 0.3 част/см<sup>2</sup> с ср. Диапазон изменения потоков в максимуме (свыше трех порядков величины) был разбит на 8 интервалов, длина которых была выбрана одинаковой в логарифмических координатах: [-0.5, 0), [0, 0.5), [0.5, 1), [1, 1.5), [1.5, 2), [2, 2.5), [2.5, 3), [3, 3.5). Границы интервалов являются целой степенью числа  $\sqrt{10}$ . Как и в случае рентгеновских вспышек, будем считать, что внутри каждого интервала события СПС распределены по тому же степенному закону, который будет найден при построении функции распределения. В данном случае это степенное распределение с показателем степени  $\beta = 1.3$ .

Найдем, как и в случае рентгеновских всплесков, координату по оси x для точки с ординатой  $\bar{y}_i = \frac{n_i}{x_i - x_{i-1}}$ . Координату y найдем из соотношения:

$$\bar{y}_i = \frac{n_i(\beta - 1)(x_i x_{i+1})^{\beta-1}}{(x_{i+1}^{\beta-1} - x_i^{\beta-1})\bar{x}_i^\beta},$$

которое является аналогом соотношения (1) для произвольного  $\beta$ .

Прологарифмировав, найдем поправку  $\Delta$  к  $\bar{x}_i = \sqrt{x_i x_{i-1}}$

$$\lg \Delta = \left(0.5 - \frac{1}{\beta}\right) \lg \vartheta + \frac{1}{\beta} (\lg(\vartheta - 1) - \lg(\vartheta^{\beta-1} - 1)) + \frac{1}{\beta} \lg(\beta - 1)$$

Для  $\vartheta = x_{i+1}/x_i = \sqrt{10}$  получим:  $\lg \Delta = 0.02$

На рисунке 2 представлено распределение для СПС с энергиями протонов больше 30 МэВ, построенное для всего диска для 23 цикла солнечной активности (СА). Из рисунка следует, что распределение хорошо описывается степенной зависимостью с показателем степени  $\beta = 1.32$

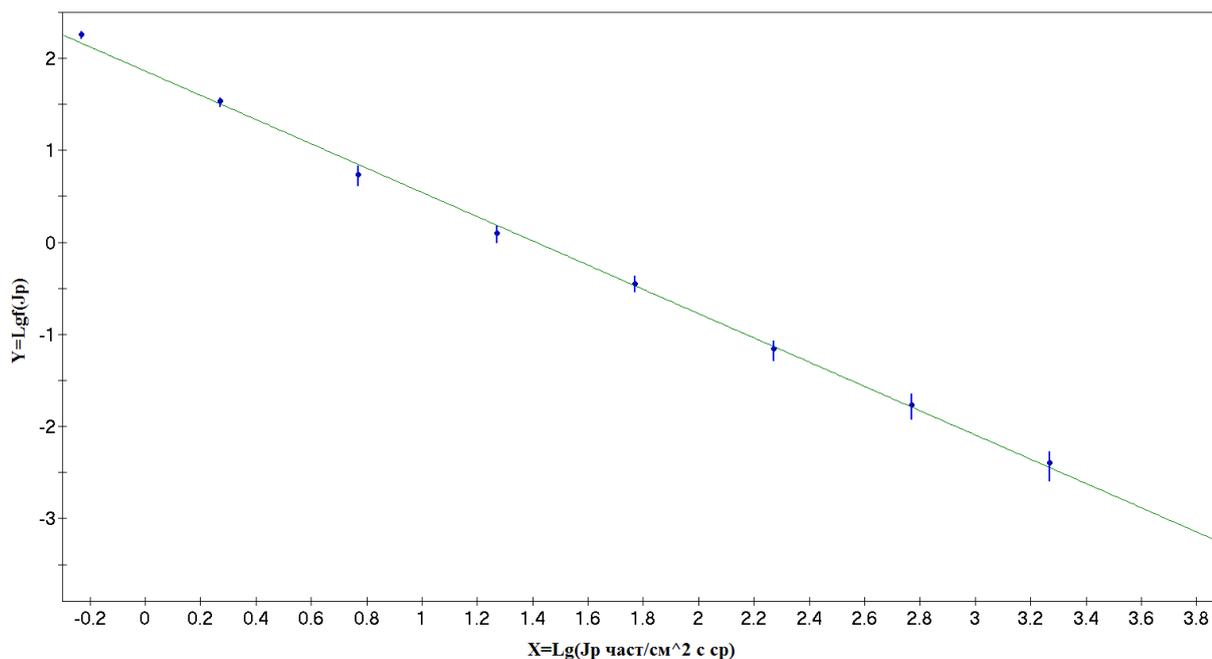


Рис. 2. Дифференциальное распределение по пиковой интенсивности СПС с энергиями протонов больше 30 МэВ для 23 цикла СА (весь диск)

Далее будем предполагать, что СПС, которые не наблюдаются из-за интенсивности меньше фоновой, также распределены по такому же закону. Основание для этого заключается в том, что, во-первых, значение фоновой интенсивности, которое определяет наблюдаемость СПС, не связано со вспышечной активностью Солнца, а определяется шумами прибора, и, во-вторых, как показало проведенное исследование особенностей двумерного распределения пиковых интенсивностей (см. ниже), такое предположение является оправданным, так как не противоречит найденным закономерностям.

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПИКОВЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ РЕНТГЕНОВСКИХ ВСПЫШЕК И ПРОТОННЫХ СОБЫТИЙ

Рассмотрим зависимость между пиковыми интенсивностями мягких рентгеновских вспышек и солнечных протонных событий. На рисунке 3 приведена такая зависимость для 23 цикла солнечной активности и западной половины диска. Зависимость построена для СПС с энергиями протонов  $E_p > 30$  МэВ и соответствующим им мягким рентгеновским вспышкам в диапазоне длин волн 0.1-0.8 нм. В рассмотрение принималась только западная половина диска, так как использовать данные от всего диска некорректно из-за сильного ослабления пиковой интенсивности от событий СПС восточной половины диска [7]. В [7] было также показано, что ослаблением интенсивности СПС с энергиями  $> 30$  МэВ можно пренебречь от вспышек западной половины диска. Для исследования выбраны СПС с энергиями протонов больше 30 МэВ, так как для событий с энергиями протонов  $> 10$  МэВ пиковая интенсивность часто бывает связана с приходом ударной волны, а для больших энергий протонов уменьшается статистическая обеспеченность результатов. Для рентгеновских вспышек рассматривались события М и X классов, так как более слабые события могут быть часто пропущены из-за высокого значения уровня фона рентгеновского излучения и его флуктуаций. В рассмотрение принимались все вспышки: вспышки после которых наблюдались протоны, вспышки, после которых не наблюдались протоны и вспышки, после которых возникновение СПС не могло быть зафиксировано из-за высокого уровня потоков протонов от предшествующих вспышек.

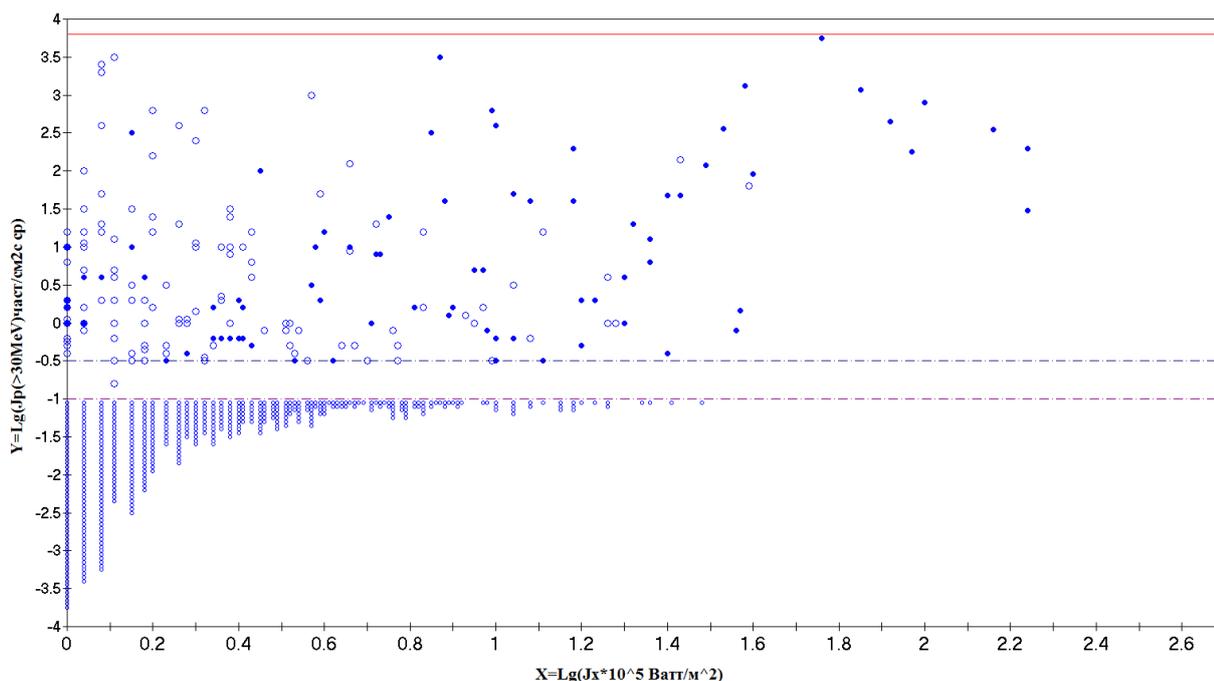


Рис. 3. Диаграмма зависимости между пиковыми интенсивностями СПС с энергиями протонов больше 30 МэВ и рентгеновских вспышек с длинами волн 0.1–0.8 нм для событий от западной половины диска 23 цикла солнечной активности

На рисунке 3 приведены данные для всех рентгеновских вспышек от западной половины диска в 23 цикле солнечной активности. События, после которых наблюдались протоны, обозначены закрашенными кружками, их ордината соответствует значению потока протонов в максимуме события. Минимальный поток протонов, при котором СПС может быть не пропущено, равен значению  $3 \cdot 10^{-1}$  част/см<sup>2</sup>ср ( $\lg J_{p\min} = -0.5$ ). Он обозначен на рисунке пунктирной горизонтальной линией. Максимальный поток протонов в событиях СПС (он должен существовать, хотя бы из энергетических соображений) равен примерно 6300 част/см<sup>2</sup>ср ( $\lg J_{p\max} = 3.8$ ), и обозначен на рисунке сплошной горизонтальной линией. Как следует из рисунка, интенсивность событий СПС растет с ростом интенсивности рентгеновских вспышек.

События, после которых не наблюдались СПС с энергией протонов больше 30 МэВ, обозначены пустыми малыми кружками. Их ордината условна. Можно утверждать только, что поток протонов в этих событиях меньше  $-0.5$ . Их число значительно убывает с ростом интенсивности рентгеновских вспышек. Следует отметить, что поскольку значение нижнего потока протонов определяется значением фоновой интенсивности и не связано со вспышечной активностью Солнца, то, скорее всего, в этих событиях также генерируются протоны, только их очень мало.

События, после которых наличие СПС не может быть зафиксировано из-за высокого уровня потоков протонов от предыдущих протонных событий, обозначены большими пустыми кружками. Их ордината условна, она соответствует значению потока протонов в момент времени близкий к времени максимума рентгеновской вспышки. В реальности поток протонов в этих событиях в несколько раз (вплоть до порядка величины) ниже, чем значение ординаты для этих событий. Как следует из рисунка, число таких событий также значительно уменьшается с ростом интенсивности рентгеновских вспышек. Вероятность того, что в этих событиях поток превышает фоновый легко оценить: она равна отношению числа наблюдаемых событий к числу событий с интенсивностью протонов меньше минимального значения для данного значения интенсивности рентгеновской вспышки. Для малых значений интенсивности вспышек она очень мала – несколько процентов, при  $\lg J_x = 1$  она может достигать 50%. Но число таких событий при таких значениях интенсивности невелико.

Таким образом, из приведенных фактов можно сделать вывод о взаимной зависимости пиковых интенсивностей событий СПС и рентгеновских всплесков.

Из-за недостаточной статистики найти двумерную вероятность наблюдения рентгеновской вспышки в интервале интенсивностей от  $J_x$  до  $J_x + dJ_x$  и протонного события в интервале

интенсивностей от  $J_p$  до  $J_p + d J_p$   $w(J_p, J_x)$  не представляется возможным. Поэтому для разработки вероятностной модели связи между пиковыми интенсивностями рентгеновских вспышек и СПС будем использовать метод функций распределения.

#### 4. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОТОННОГО СОБЫТИЯ ПОСЛЕ НАБЛЮДЕНИЯ РЕНТГЕНОВСКОЙ ВСПЫШКИ. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ АРГУМЕНТОВ

Зная одномерные функции распределения, можно определить свойства условной вероятности протонного события и определить зависимость средней интенсивности СПС от интенсивности рентгеновской вспышки.

Рассмотрим двумерную вероятность наблюдения рентгеновской вспышки в интервале интенсивностей от  $J_x$  до  $J_x + d J_x$  и протонного события в интервале интенсивностей от  $J_p$  до  $J_p + d J_p$  нормированную на единицу  $w(J_p, J_x)$ :

$$\iint_0^{\infty} w(J_x, J_p) dJ_x dJ_p = 1,$$

тогда нормированные на единицу дифференциальные функции распределения рентгеновских всплесков  $f_x(J_x)$  и протонных событий  $f_p(J_p)$  будут определяться соотношениями:

$$f_x(J_x) = \int_0^{\infty} w(J_p, J_x) dJ_p \quad f_p(J_p) = \int_0^{\infty} w(J_p, J_x) dJ_x$$

Условная вероятность наблюдения протонного события в интервале интенсивностей от  $J_p$  до  $J_p + d J_p$  после всплеска в интервале интенсивностей от  $J_x$  до  $J_x + d J_x$  (которая представляет наибольший интерес для прогноза протонных событий по рентгеновским вспышкам) будет равна:

$$w(J_p / J_x) = \frac{w(J_p, J_x)}{\int_0^{\infty} w(J_p, J_x) dJ_p} \quad (2)$$

Дифференциальная функция распределения протонных событий по интенсивности в максимуме будет связана с функцией распределения рентгеновских всплесков по интенсивности в максимуме следующим образом:

$$f_p(J_p) = \int_0^{\infty} w(J_p / J_x) f_x(J_x) dJ_x \quad (3)$$

Можно показать, что в случае, если распределение для рентгеновских всплесков степенное  $f_x(J_x) = A_x J_x^{-\alpha}$ , то для того, чтобы распределение для протонных событий тоже было степенным  $f_p(J_p) = A_p J_p^{-\alpha}$ , необходимо и достаточно, чтобы условная вероятность в наиболее общем виде определялась выражением (4):

$$w(J_p / J_x) = \sigma \left( \frac{J_p}{J_x} \right) \frac{1}{J_x^\gamma}, \quad (4)$$

где  $\gamma = (\alpha - 1)/(\beta - 1)$ . Необходимость легко доказать, подставив в (3) выражение (4) и функцию  $f_x(J_x) = A_x J_x^{-\alpha}$  и сделав замену переменной. Получим:

$$f_p(J_p) = \int_0^{\infty} \sigma \left( \frac{J_p}{J_x} \right) \frac{A_x}{J_x^{\gamma+\alpha}} dJ_x = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} d\mu \sigma(\mu) \mu^{\alpha-1/\gamma} J_p^{-(1+\alpha-1/\gamma)} A_x = A_p \cdot J_p^{-\beta}$$

где  $A_p = (A_x/\gamma) * \int_0^\infty d\mu \sigma(\mu) \mu^{(\alpha-1)/\gamma}$ , а  $\mu = J_p/J_x^\gamma \mu^\gamma$

Докажем достаточность этого утверждения, то есть если справедливо:  $f_p(J_p) = A_p J_p^{-\beta}$ , то будет справедливо и (4). Запишем в наиболее общем виде:

$$w(J_p / J_x) = \sigma\left(\frac{J_p}{J_x^\gamma}, J_p\right) \frac{1}{J_x^\gamma} \tag{5}$$

где для  $\gamma$  возьмем значение:  $\gamma = (\alpha - 1)/(\beta - 1)$ .

Подставив (5) в (3), и произведя, как и раньше, замену переменной для  $J_x$  на  $\mu = J_p/J_x^\gamma$  получим:

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty d\mu \sigma(\mu, J_p) \mu^{(\alpha-1)/\gamma} J_p^{-(1+\alpha-1/\gamma)} A_x \equiv A_p \cdot J_p^{-\beta}$$

или:

$$\int_0^\infty d\mu \sigma(\mu, J_p) \mu^{(\beta-1)} = const(J_p),$$

где

$$const(J_p) = \gamma \frac{A_p}{A_x}$$

Взяв производную по  $J_p$  от левой и правой части, получим:

$$\int_0^\infty d\mu \frac{\partial}{\partial J_p} \sigma(\mu, J_p) \mu^{(\beta-1)} = 0$$

Это равенство справедливо для любых  $J_p$ . Отсюда следует независимость от  $J_p$ .

Действительно, производная должна менять знак на интервале интегрирования, при некотором значении  $J_p$  она равна нулю или равна 0 при всех  $J_p$ . Во втором случае, зависимость от  $J_p$  отсутствует и утверждение доказано. В первом случае при некотором  $J_p = J_{p1}$  производная равна нулю, и при этом значении имеется либо максимум, либо минимум функции  $\sigma(\mu, J_p)$ . В случае максимума при  $J_{p1}$  получим:

$$\int_0^\infty d\mu (\sigma(\mu, J_{p1}) - \sigma(\mu, J_p)) \mu^{(\beta-1)} = 0$$

Здесь выражение в скобках больше нуля. Поскольку интеграл от положительной функции не может быть равен нулю, то такая ситуация невозможна. Аналогично это утверждение доказывается для случая минимума или нескольких максимумов и минимумов. Таким образом, возможен только второй случай и достаточность доказана.

### 5. ОСОБЕННОСТИ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИКОВЫХ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ПРОТОННЫХ СОБЫТИЙ И РЕНТГЕНОВСКИХ ВСПЫШЕК

Зная зависимость условной вероятности от аргументов, можно найти особенности двумерного распределения для  $\lg J_p$ ,  $\lg J_x$  или особенности распределения точек на диаграмме представленной на рис. 3.

Из вида условной вероятности можно сделать вывод о нелинейной зависимости интенсивности протонного события от интенсивности мягкого рентгеновского всплеска  $J_p \sim J_x^\gamma$ , где  $\gamma = (\alpha - 1)/(\beta - 1)$ .

Среднее значение интенсивности протонного события равно:

$$\langle J_p \rangle = \int_0^\infty w \left( \frac{J_p}{J_x^\gamma} \right) J_p \frac{1}{J_x^\gamma} dJ_p = J_x^\gamma \int_0^\infty d\mu \sigma(\mu) \mu$$

В логарифмических координатах линейная зависимость:

$$\lg \langle J_p \rangle = \gamma \lg J_x + const \tag{6}$$

где  $const = \lg \left( \int_0^\infty d\mu \sigma(\mu) \mu d\mu \right)$

Среднее значение для  $\lg J_p$  также зависит от  $\lg J_x$  по линейному закону:

$$\langle \lg J_p \rangle = \gamma \lg J_x + \int_0^\infty d\mu \sigma(\mu) \lg \mu \tag{7}$$

Отсюда следует, что распределение точек для  $y = \lg J_p$ ,  $x = \lg J_x$  на диаграмме (см. рис.3) должно быть вытянуто вдоль линии  $y = \gamma \lg x + const$

Найдем среднеквадратичное отклонение от среднего значения  $\lg J_p$ :

$$\langle (\lg J_p - \langle \lg J_p \rangle)^2 \rangle = \int \sigma(z) \lg^2 z dz - \left( \int \sigma(z) \lg z dz \right)^2$$

Отсюда следует, что разброс значений  $\lg J_p$  относительно среднего значения не зависит от  $J_x$ , то есть является  $const (J_x)$ .

Рассмотрим, как выполняется найденные особенности для диаграммы рис. 3.

В нашем случае, используя значения показателей степени для функции распределения по интенсивности СПС  $\beta=1.3$  и  $\alpha=2.13$  для показателя степени функции распределения по потоку в максимуме рентгеновских вспышек, получим значение для  $\gamma \approx 4$ , (см. также [16]).

Таким образом, логарифм среднего значения пиковой интенсивности протонных событий и среднее значение логарифма значений пиковой интенсивности зависят линейным образом от логарифма пиковой интенсивности рентгеновских вспышек. Эти зависимости могут быть представлены прямыми с одинаковым углом наклона к оси абсцисс ( $\text{tg} \alpha = \gamma = 4$ ).

Проверим, как найденные закономерности выполняются для информации диаграммы рис. 3.

Из-за небольшой статистики и из-за того, что большая часть протонных событий не наблюдается, трудно найти положение этих прямых относительно оси  $y$ . Поэтому найдем предельные положения прямых с наклоном  $\text{tg} \alpha = 4$  (при этом учитывается независимость разброса точек от среднего значения (7) от  $\lg J_x$ ), которые ограничивают область плоскости, внутри которой заключены все точки. Эти прямые представлены на рис. 4 пунктирными линиями. Жирной линией нанесена прямая равноудаленная от пунктирных прямых. Уравнения этих прямых равны (сверху вниз):  $\lg J_p = 4 \lg (J_x 10^5) + 0.5$ ;  $\lg J_p = 4 \lg (J_x 10^5) - 3.15$ ;  $\lg J_p = 4 \lg (J_x 10^5) - 6.8$  ( $J_p$  в част /см<sup>2</sup>срр,  $J_x$  в Втг/м<sup>2</sup>). Как видно из рис. 4, эти уравнения хорошо описывают особенности распределения точек на диаграмме. В частности в области ограниченной предельными прямыми заключено 99.5% точек (при этом предполагается, что точки для ненаблюдаемых событий также попадают в эту область, что естественно предположить экстраполируя расположение точек для больших  $\lg J_x$  в область малых значений  $\lg J_x$ ).

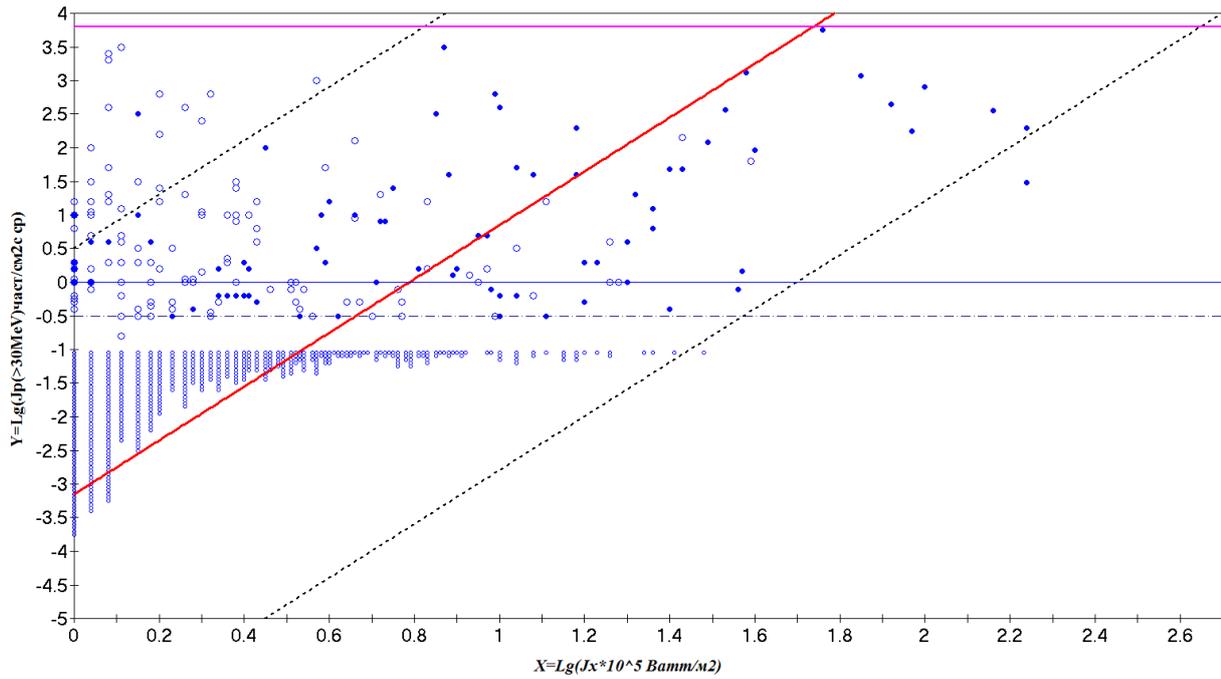


Рис. 4. Диаграмма рис. 3 с прямыми линиями, описывающими особенности двумерного распределения. Пунктирные прямые – зависимости максимального и минимального значения пиковой интенсивности протонных событий от пиковой интенсивности соответствующих рентгеновских вспышек. Сплошная прямая описывает равноудаленные от предельных значений интенсивности протонных событий.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим, какие результаты, следует из проведенного исследования.

Как следует из рис. 4, реальный разброс значений пиковых интенсивностей протонных событий после рентгеновских вспышек составляет примерно 7 порядков величины. При этом единым образом можно описать все двумерное распределение. Предположение о наличии не протонных рентгеновских событий, которые принципиально отличаются от протонных представляется неоправданным. Поскольку, для большинства рентгеновских вспышек справедлив эффект Нойперта [17], то поток рентгеновского излучения в максимуме мягкого рентгеновского излучения должен быть пропорционален интегральному потоку жесткого рентгеновского излучения ( $\int_0^\infty J_{hx}(t)dx \sim \int_0^{t_m} (dJ_{sx}/dt)dt \sim J_{sx}(t_m) - 0 = J_{x,max}$ ) и, в силу линейности процесса излучения жесткого рентгеновского излучения, должен быть пропорционален полному числу ускоренных во вспышках электронов  $N_e$  с энергиями в десятки кэВ. В тоже время интенсивность протонного события в максимуме в силу линейности процесса распространения протонов пропорционально полному числу ускоренных протонов  $N_p$  (с энергиями в десятки МэВ). Поэтому можно сделать вывод об особенности ускорения быстрых частиц таких энергий во вспышках, наличие сильной нелинейной зависимости:  $N_p \sim N_e^4$ .

При разработке методов прогноза протонных событий по мягкому рентгеновскому излучению солнечных вспышек следует учитывать полученные закономерности: сильную нелинейную зависимость пиковых интенсивностей ( $\langle J_p \rangle = const J_x^4$ ) и независимость отклонений от среднего значения для  $lg J_p$  от интенсивности рентгеновской вспышки. Также следует учитывать зависимость максимально возможного пикового потока СПС от пикового потока рентгеновской вспышки:  $lg J_p = 4 lg J_x 10^5 + 0.5$  (где  $J_p$  в част/см<sup>2</sup>ср,  $J_x$  в Ватт/м<sup>2</sup>). Для вспышек класса больше X40 из приведенных результатов следует, что ненаблюдаемые протонные события отсутствуют, и возможная нижняя граница пиковых потоков протонов определяется выражением:  $lg J_p = 4 lg J_x 10^5 - 6.8$ , где  $J_p$  в част/см<sup>2</sup>ср,  $J_x$  в Ватт/м<sup>2</sup>.

Предложенный метод нахождения зависимостей между величинами, распределенными по степенному закону, может быть применен и для других величин распределенных по степенному закону.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буров В.А., Очелков Ю.П. Научастиг появления геоэффективных потоков протонов в околоземном космическом пространстве. //Федеральная служба по интеллектуальной собственности. 2013, Бюлл. № 17, 20.06.
2. M.Laurenza,E.W.Cliver,J.Hewitt,M.Storini,A.G.Ling,C.C Balch,M.L.Kaiser A technique for short-term warning of solar energetic particle events based on flare location, flare size, and evidence of particle escape//Spfct Weather, Vol.7,S04008, doi:10.1029/2007SW000379,2009
3. М.Н.Беловский, Ю.П.Очелков. Особенности генерации корпускулярного и электромагнитного излучения солнечных вспышек. //Астрономический журнал, 1980, т.57, с. 119-126.
4. H.S. Hudson Threshold effect in second-stage acceleration// Solar Phys., 1978, v.57, p 237-240
5. Aschwanden M.J. Self-Organized Criticality Systems, // Open Academic Press Berlin Warsaw, 2013
6. M.N. Belovskij, Yu.P. Ochelkov. On save peculiarities of generation of electromagnetic and corpuscular radiation in solar flares.//Izvestia AN SSSR, Phys.Ser.,43,4,749-752,1979
7. Ochelkov Yu. P. // J. Phys. Conf. Ser. 2013. V. 409. № 1. P. 12183
8. Очелков Ю.П. Изменение гелиодолготной зависимости пиковых интенсивностей солнечных протонных событий с солнечными циклам //Известия РАН. серия физическая, 2019, том 83, № 5, с. 590–593.
9. М.Н. Беловский, Ю.П. Очелков., Н.К. Переяслова, А.В. Устинов, О направленности рентгеновского излучения солнечных вспышек. Космические исследования,1982, т. XX, Вып.3, с. 417-421.
10. Belovsky, M. N. and Ochelkov, Yu. P: 1979// Doklady ANSSSR 236, 13316
11. B.R. Dennis. Solar hard X-ray bursts// Solar Physics, 1985, v.100, 465-490
12. V.Kurt, A.Belov, H.Mavrmicaiki, M.Gerontidou. Statistical analysis of solar proton events.// 2004, Annles Geophysicae 22, p.2255-2271
13. Van Hollebeke, M. a Sung, McDonnald F.M. Then variation of solar proton energy spectra and size distribution with heliolongitude.// Solar Phys.,41, 189-235,1975
14. L.I. Miroshnichenko, B. Mendoza and R. Pérez Enríquez. Size Distrtibutions of the >10 MeV Solar Proton Events// Solar Phys., Volume 202, Number 1, August, 200 151-171
15. The Catalog of Solar Flare Events with X-ray Class M1 - X>17.5 XIII cycle of Solar Acnivity (1996 - 2007)
16. В.А. Буров, Ю.П. Очелков.О возможности прогноза интенсивности солнечных протонных событий по тепловому рентгеновскому излучению солнечных вспышек. Гелиогеофизические исследования. выпуск 25, 30 – 36, 2020
17. Neupert W.M.1968, Ap.J, 514, L59

#### THE MODEL OF PROBABILITY DEPENDENCE OF SOLAR PROTON EVENTS AND SOLAR SX-FLARES PEAK INTENSITIES

Yu. P. Ochelkov

In the paper the probability dependence between values with power-law distributions is investigated. The most complete information about the probability dependence between values can be obtained by building the two-dimensional distribution of investigated values. However in our case it is impossible because the limited statistical material. The paper shows that the characteristic features the two-dimensional distribution can be obtained based on studies the power-law one-dimensional distributions and their relationship. The method is realized for the next values: the peak intensity of solar proton events with proton energy more than 30 MeV, the peak intensity of solar SX flares in the

wavelength range 0.1-0.8 nm (according to the GOES spacecraft). The correlation analysis in this case not applicable due to the power-law distributions of these values and also lack of opportunity to obtain a large number of proton events with intensities which are less background intensity. The regularities of probabilistic dependence are found which can be used for solar proton forecast on solar SX-flares and during the study the peculiarities of particle acceleration in solar flares.

**KEYWORDS:** SX-RAY FLARE, SOLAR PROTON EVENT, THE PROBABILITY DEPENDENCE, SIZE DISTRIBUTION.