



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕТЕРОФАЗНОЙ СРЕДЕ. ЧАСТЬ 1

Ю. Е. Беликов, С. В. Дышлевский, Ш. С. Николайшвили

Описываются основы построения модели переноса солнечного излучения применительно к сферической атмосфере. Приводится основное интегральное уравнение переноса излучения и принципы его решения для неоднородного сферически-симметричного тела заданного радиуса, учитывающее распределение источников однократно рассеянной радиации. Подробно рассмотрена геометрия постановки задачи. Приводятся алгоритмы численного решения уравнения переноса методом последовательных порядков рассеяния. В первой части статьи приведены алгоритмы расчета оптических параметров гетерофазной среды при дискретно заданных исходных данных, в частности приведены алгоритмы расчета оптических путей фотонов на различных трассах внутри гетерофазной среды.

Ключевые слова МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ, РАССЕЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ, ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ, ИНДИКАТРИСА РАССЕЯНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Многие актуальные задачи физики звездных и планетных атмосфер требуют решения уравнения переноса излучения. Численные методы решения уравнения переноса излучения разрабатывались группой сотрудников Тбилисского Государственного университета под руководством Шота Сергеевича Николайшвили [1]. В дальнейшем Ш.С. Николайшвили продолжал разрабатывать тему численного моделирования вместе с сотрудниками Института прикладной геофизики [2–4]. В частности, совместно с Ю.Е. Беликовым была разработана модель переноса излучения солнечного излучения внутри искусственного сферического образования, которая была реализована в виде компьютерной программы, написанной на языке Фортран для РС.

В дальнейшем программа была обобщена для решения задачи переноса излучения в земной атмосфере. Результаты расчетов по созданным компьютерным программам вошли в целый ряд статей [5–10], а также в докторскую диссертацию Ю.Е. Беликова [11]. Модель прошла верификацию и тестирование [2, 12–14]. Был создан целый ряд модификаций этой программы.

В частности, Дышлевский С.В. в рамках работы над кандидатской диссертацией провел тестирование, а также модифицировал программу для решения задачи переноса излучения в линии Лайман-альфа в верхней атмосфере Земли [15]. Однако алгоритмы, заложенные в программе, так и не были полностью опубликованы, за исключением некоторых общих уравнений. Надо отметить, что представленные здесь алгоритмы решения уравнения переноса излучения являются оригинальными и весьма эффективными, решение задач уравнения переноса излучения занимает относительно мало времени по сравнению с другими программами (см. Часть 3).

Численная модель основана на методе последовательных порядков рассеяния, заключающемся на численном решении интегральных уравнений переноса излучения. Эти уравнения решаются методом последовательных приближений.

Математическая модель переноса солнечного излучения будет изложена в трех частях. Две первых части будут посвящены непосредственно теории переноса излучения, а последняя — третья

часть — будет посвящена верификации и тестированию программы, разработанной на основе рассматриваемых в данной работе алгоритмов. Особое внимание при тестировании программы будет уделено особенностям переноса солнечного излучения в сумеречных условиях, характерных для условий Арктики в связи с предполагаемым моделированием изменения климата Арктики в результате движения магнитного полюса (грант РФФИ 18-05-00812).

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Постановка задачи заключается в следующем. Неоднородное сферически-симметричное тело с радиусом R (это может быть и планета Земля вместе с атмосферой) облучается плоским потоком света. Параметры, определяющие взаимодействие излучения с веществом: сечения поглощения и рассеяния, а также индикатриса рассеяния, предполагаются заданными. Все эти параметры зависят только от расстояния от центра сферы. Требуется рассчитать угловые распределения многократно рассеянных фотонов как внутри сферического образования, так и на выходе из различных точек поверхности сферы.

Принималось, что полные сечения поглощения и рассеяния, а также индикатрисы рассеяния для частиц различных веществ определяются по теории Ми [16,17]. Для расчёта указанных параметров необходимо знать параметр $\alpha=2\pi r/\lambda$ (λ — длина волны падающего излучения, r — радиус частицы) и комплексный показатель преломления частицы. Для вещества, состоящего из частиц различных размеров, вычисляются средневзвешенные индикатрисы рассеяния, а также суммарные сечения поглощения и рассеяния. Если в атмосферу выбрасывается газ, то истинное поглощение для излучения на частотах вне молекулярных полос отсутствует. Индикатриса рассеяния и сечение рассеяния при этом определяются известными формулами Релея [17, 18].

Задача в указанной постановке решается интегрированием уравнения переноса излучения вдоль фиксированного луча. Пусть $\Phi(\mathbf{r},\Omega)$ — интенсивность рассеянного излучения в точке M с радиусом вектором \mathbf{r} в направлении единичного вектора Ω . Точка M может лежать как внутри, так и на поверхности сферического образования радиуса R . Функция $\Phi(\mathbf{r},\Omega)$ удовлетворяет уравнению:

$$\Phi(\mathbf{r},\Omega) = \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|} [F(\mathbf{r}-s\Omega,\Omega) + F^{(1)}(\mathbf{r}-s\Omega,\Omega)] \left\{ \exp\left[-\int_0^s \sigma(\mathbf{r}-t\Omega)dt\right] \right\} ds \quad (1.1)$$

Здесь:

$$F(\mathbf{r},\Omega) = \sigma_s(\mathbf{r}) \int_{|\Omega'|=1} g(\mathbf{r},\Omega\Omega')\Phi(\mathbf{r},\Omega')d\Omega' \quad , \quad (1.2)$$

$$F^{(1)}(\mathbf{r},\Omega) = \sigma_s(\mathbf{r}) \int_{|\Omega'|=1} g(\mathbf{r},\Omega\Omega')\Phi^{(0)}(\mathbf{r},\Omega')d\Omega' \quad , \quad (1.3)$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_a(\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

$\Phi^{(0)}(\mathbf{r},\Omega)$ — интенсивность нерассеянного поля, $\sigma_s(\mathbf{r})$ и $\sigma_a(\mathbf{r})$ — коэффициенты рассеяния и поглощения, рассчитанные на единицу объема, $g(\mathbf{r},g(\mathbf{r},\mu))$ — индикатриса рассеяния, нормированная согласно условию:

$$2\pi \int_{-1}^{+1} g(\mathbf{r},\mu)d\mu = 1, \quad (1.5)$$

где $\mu = \cos\theta'$, θ' — угол рассеяния фотона.

В формуле (1.1) $s_{rp} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{rp}|$ определяется расстоянием от точки M до точки пересечения луча Ω_M , исходящего из точки M в направлении вектора Ω , с поверхностью сферического образования.

В приближении однократного рассеяния поле излучения представляется формулой:

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) = \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|} F^{(1)}(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega) e^{-\int_0^s \sigma(\mathbf{r}-t\Omega) dt} ds \quad (1.6)$$

Функция $F^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega)$, стоящая под знаком интеграла, представляет собой распределение источников однократно рассеянной радиации:

$$F^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) = S\sigma_s(\mathbf{r})g(\mathbf{r}, \Omega, \Omega_0) \left\{ \exp\left[-\int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p(\Omega_0)|} \sigma(\mathbf{r}-t\Omega_0) dt\right] \right\} ds, \quad (1.7)$$

где S — плотность потока первичных фотонов, падающих на рассеивающую сферу, Ω_0 — единичный вектор вдоль направления распространения первичных фотонов, $r_p(\Omega_0)$ — радиус-вектор точки входа в сферу луча, проходящего через точку $M(\mathbf{r})$ в направлении Ω_0 (рис.1).

1.2 ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ

Уравнение (1.1) в условиях сформулированной задачи имеет решение, симметричное относительно оси, соединяющей центры рассеивающего тела и Солнца. Исходя из этого факта, будем пользоваться прямоугольной системой координат, которую построим следующим образом. Начало координат совместим с центром рассеивающей сферы. Ось O_z направим вдоль оси симметрии в сторону Солнца (рис.1). В качестве оси O_x возьмем пересечение плоскости $z=0$ с вертикальной плоскостью, проходящей через ось O_z и точку наблюдения $M(\mathbf{r})$. Наконец, ось O_y направим так, чтобы выбранная система O_{xyz} была бы правой. Наряду с системой O_{xyz} будем пользоваться прямоугольной системой $M_{\xi\eta\zeta}$, связанной с точкой наблюдения M . Ось M_ξ этой системы направлена вдоль радиуса — вектора $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$. Ось M_ζ образована пересечением плоскости, проходящей через точку $M(\mathbf{r})$ перпендикулярно к радиусу-вектору \mathbf{OM} , с плоскостью $y=0$ и направлена в сторону Солнца. Система также предполагается правой.

Угол между вектором Ω и осью M_ξ будем обозначать символом θ , а азимутальный угол вектора Ω в плоскости $M_{\xi\eta}$, отсчитываемый в положительном направлении относительно оси M_ξ , — символом α .

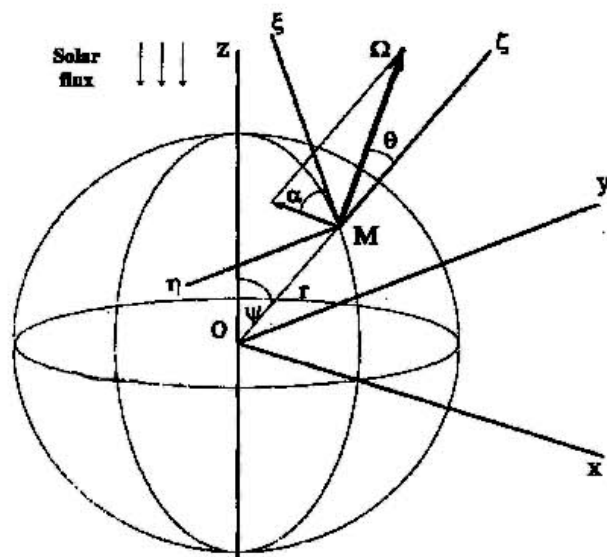


Рис. 1. К геометрии задачи

Искомая функция $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$, вследствие симметрии задачи, зависит в действительности от четырех скалярных аргументов r, ψ, θ и α . Здесь $r=|\mathbf{r}|$ — расстояние точки наблюдения от центра рассеивающего тела; ψ — угол, образованный радиус- вектором \mathbf{r} с осью O_z ; переменные θ и α имеют смысл, указанный выше. В силу сказанного в дальнейшем вместо $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ и $F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ можно писать $\Phi(r, \psi; \theta, \alpha)$ и $F(r, \psi; \theta, \alpha)$, соответственно.

Обозначим через $\mathbf{\Omega}_M$ луч, выходящий из точки $M(\mathbf{r})$ в направлении вектора $\mathbf{\Omega}$. Нетрудно показать, что направляющие косинусы a, b и c луча $\mathbf{\Omega}_M$ в системе O_{xyz} представляются формулами:

$$\begin{cases} a = \sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta \cos \alpha, \\ b = \sin \theta \sin \alpha, \\ c = \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha. \end{cases} \quad (1.8)$$

Следовательно, прямая, проходящая через точку $M(\mathbf{r}) = (r \sin \psi, 0, r \cos \psi)$ параллельно лучу $\mathbf{\Omega}_M$, будет определяться уравнениями:

$$\begin{cases} x = r \sin \psi - at, \\ y = -bt, \\ z = r \cos \psi - ct, \end{cases} \quad (1.9)$$

t — расстояние от точки $M(\mathbf{r})$ до точки (x, y, z) , если последняя предшествует точке M при движении вдоль луча $\mathbf{\Omega}_M$; в противном случае t означает указанное расстояние, взятое со знаком минус.

Найдем координаты точки входа луча $\mathbf{\Omega}_M$ внутрь рассеивающего тела. Подставляя выражения для переменных x, y, z в уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1.10)$$

и решая полученное уравнение относительно t , находим:

$$t_{sp}(r, \theta) = r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.11)$$

Этот результат можно получить непосредственно из геометрического рассмотрения.

Поскольку функция зависит, по предположению, только от $r = |\mathbf{r}|$, то для интеграла, стоящего в показателе экспоненты в уравнении (1.1), будем иметь:

$$\tau(r, \theta, s) = \int_0^s \sigma(\mathbf{r} - t\mathbf{\Omega}) dt = \int_0^s \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt \quad (1.12)$$

Возвратимся к исходному уравнению и перепишем его в переменных r, ψ, θ и α . Согласно сказанному выше,

$$F(\mathbf{r} - s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) = F(r_s, \psi_s; \theta_s, \alpha_s), \quad (1.13)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} r_s = \sqrt{r^2 - 2rs \cos \theta + s^2}, \\ \cos \psi_s = \frac{r \cos \psi - s(\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha)}{r_s}, \\ \cos \theta_s = \frac{r \cos \theta - s}{r_s}, \\ \cos \alpha_s = \frac{\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha - \cos \psi_s \cos \theta_s}{\sin \psi_s \sin \theta_s} \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Первые три из последних формул легко получаются из рассмотрений, относящихся к геометрии задачи. Дополнительного пояснения требует последняя формула. Направляющий косинус вектора Ω_M вдоль оси O_z в системе O_{xyz} , связанной с точкой $M(\mathbf{r})$, равен $\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha$.

Рассмотрим систему координат $O_{x_s y_s z_s}$, связанную с точкой $M_s(\mathbf{r}_s)$, $\mathbf{r}_s = \mathbf{r} - s\Omega$. Так как оси O_z и O_{z_s} обеих систем совпадают, то совпадают также составляющие вектора Ω_M вдоль этих осей. Следовательно,

$$\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha = \cos \psi_s \cos \theta_s + \sin \psi_s \sin \theta_s \cos \alpha_s \quad (1.15)$$

отсюда вытекает последняя из формул (1.14).

Поскольку $\mathbf{r}_{cp} = \mathbf{r} - t_{cp}\Omega$, то с учетом формул (1.11) и (1.13) уравнению можно придать вид:

$$\Phi(r, \psi; \theta, \alpha) = \int_0^{r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}} F(r_s, \psi_s; \theta_s, \alpha_s) e^{-\tau(r, \theta, s)} ds + \Phi^{(1)}(r, \psi; \theta, \alpha) \quad (1.16)$$

$$\Phi^{(1)}(r, \psi; \theta, \alpha) = \int_0^{r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}} F^{(1)}(r_s, \psi_s; \theta_s, \alpha_s) e^{-\tau(r, \theta, s)} ds \quad (1.17)$$

параметры r_s , ψ_s , θ_s и α_s определяются по формулам (1.14).

Осталось преобразовать формулу (1.2) для функции $F(\mathbf{r}, \Omega)$. В силу симметрии задачи имеем:

$$F(r, \psi; \theta, \alpha) = \sigma_s(r) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} g(r, \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\alpha - \alpha')) \Phi(r, \psi; \theta', \alpha') d\alpha' \quad (1.18)$$

Если воспользоваться очевидным соотношением:

$$\Phi(r, \psi; \theta, \alpha) = \Phi(r, \psi; \theta, 2\pi - \alpha), \quad (1.19)$$

то формуле можно придать вид

$$F(r, \psi; \theta, \alpha) = \sigma_s(r) \int_0^\pi d\alpha' \int_0^\pi H(r, \psi; \theta, \alpha; \theta', \alpha') \Phi(r, \psi; \theta', \alpha') \sin \theta' d\theta' \quad (1.20)$$

где:

$$H(r, \psi; \theta, \alpha; \theta', \alpha') = g(r, \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\alpha' - \alpha)) + g(r, \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\alpha' + \alpha)) \quad (1.21)$$

Так как в системе координат O_{xyz} $\Omega_0 = (0, 0, -1)$, то согласно (1.9) имеем:

$$\Omega \Omega_0 = -(\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha). \quad (1.22)$$

Поэтому плотность источников однократно рассеянных фотонов, определенная интегралом (1.7), представляется формулой:

$$F^{(1)}(r, \psi; \theta, \alpha) = S \sigma_s(r) g(r, -\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta \cos \alpha) e^{-\tau(r, \pi - \psi)} \quad (1.23)$$

Здесь $\tau(r, \theta)$ означает функцию $\tau(r, \theta, s)$, определенную интегралом (1.12), при $s = r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}$, т. е.:

$$\tau(r, \theta) = \int_0^{r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}} \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt \quad (1.24)$$

Итак, расчет интенсивности однократно рассеянного излучения на поверхности сферы приводится к формуле:

$$\Phi^{(1)}(R, \psi; \theta, \alpha) = \int_0^{2R \cos \theta} \sigma_s(r_s) e^{-\tau(r, \theta, s)} g(r_s, -\cos \psi_s \cos \theta_s - \sin \psi_s \sin \theta_s \cos \alpha_s) e^{-\tau(r_s, \pi - \psi_s)} ds \quad (1.25)$$

переменные r_s, ψ_s, θ_s и α_s вычисляются по формулам (1.14) при $r = R$.

1.3 РАСЧЁТ СЕЧЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Процедуру интегрирования уравнения (1.16), описывающего распределение рассеянного поля фотонов внутри рассматриваемой сферы, можно описать на примере приближенного расчета интеграла (1.17). Предварительно укажем, как задаются функции $\sigma(r), \sigma_s(r)$ и $g(r, \mu)$.

Мы будем исходить из следующей модели рассеивающего образования. Пусть

$$r_0, r_1, \dots, r_k, r_0 = 0, r_k = R, \quad (1.26)$$

— заданное разбиение интервала $[0, R]$. Будем считать, что функции $\sigma(r)$ и $\sigma_0(r)$ заданы в виде таблиц их значений в узлах $r_k, k=0, 1, \dots, K$. Значения $\sigma(r)$ и $\sigma_s(r)$ в точках интервала $[0, R]$, не совпадающих с узлами заданной сетки, условимся рассчитывать с помощью линейной интерполяции по формуле:

$$\sigma(r) = \frac{r - r_{k-1}}{\Delta r_k} \sigma_k + \frac{r_k - r}{\Delta r_k} \sigma_{k-1}, \quad r_{k-1} < r < r_k, \quad (1.27)$$

$\sigma_k = \sigma(r_k)$ — значение в узле $r = r_k, \Delta r_k = r_k - r_{k-1}$. Аналогично рассчитываются значения $\sigma_s(r)$.

При задании функции $g(r, \mu)$ будем считать, что интервал $[0, R]$ разбит на L частей, $L \leq K$, узлы разбиения условимся обозначать через r_i^g ,

$$r_1^g, r_2^g, \dots, r_L^g$$

$r_L^g = R$, так что при $r_{l-1}^g < r < r_l^g$, функция определяется таблицами:

$$g^l(\mu_0), g^l(\mu_1), \dots, g^l(\mu_N), \quad l=1, 2, \dots, L,$$

где — $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N$ заданные узлы разбиения интервала изменения угловой переменной μ , которые считаются одинаковыми для всех интервалов однородности индикатрисы $g(r, \mu)$, т.е. интервалов $[r_{l-1}^g, r_l^g]$, $l=1, 2, \dots, L$. Отметим, что при таком задании функция $g(r, \mu)$ как функция переменной μ будут, вообще говоря, иметь место разрывы на границах раздела слоев однородности. Значения $g(r, \mu)$ при μ , отличных от узлов сетки задания, рассчитываются по формуле линейной интерполяции, т.е. при $\mu_n < \mu < \mu_{n+1}$, $n=1, 2, \dots, N$, полагаем:

$$g(r, \mu) = \frac{\mu - \mu_n}{\Delta\mu_n} g(r, \mu_{n-1}) + \frac{\mu_{n+1} - \mu}{\Delta\mu_n} g(r, \mu_n), \quad \Delta\mu_n = \mu_{n+1} - \mu_n, \quad (1.28)$$

индекс l для упрощения письма опущен. Будем считать, что табличные значения функции $g(r, \mu)$ при всех r удовлетворяют разностному условию нормировки, а именно:

$$2\pi \sum_{n=1}^N \frac{g(r, \mu_n) + g(r, \mu_{n-1})}{2} \Delta\mu_n = 1 \quad (1.29)$$

которая следует из условия нормировки индикатрисы рассеяния, если для приближенного расчета соответствующего интеграла воспользоваться формулой трапеций. В тех случаях, когда заданные таблицы не обеспечивают выполнения условия (1.29), т.е. сумма слева оказывается равной некоторому числу $\eta \neq 1$, то все табличные значения доумножаем на число $1/\eta$.

1.4 РАСЧЁТ ОПТИЧЕСКИХ ПУТЕЙ

Начнем с расчета оптического пути $\tau(r, \theta)$, определенного по формуле (1.24). Предположим вначале, что $\theta = 0$. Тогда :

$$\tau(r, 0) = \int_0^{R+r} \sigma(|r-t|) dt \quad (1.30)$$

Пусть k таково, что

$$r_{k-1} < r < r_k.$$

Представим предыдущий интеграл в виде:

$$\begin{aligned} \tau(r, 0) &= \left(\int_0^{r-r_{k-1}} + \int_{r-r_{k-1}}^r \right) \sigma(r-t) dt + \int_r^{R+r} \sigma(t-r) dt = \\ &= \frac{(r-r_{k-1})^2}{2\Delta r_k} \sigma_k + \frac{\Delta r_k}{2} \sigma_{k-1} - \frac{(r_k-r)^2}{2\Delta r_k} + \left(\sum_{i=1}^k + \sum_{i=1}^K \right) \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2} \Delta r_i, \quad \Delta r_i = r_i - r_{i-1}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Отсюда, при $r = r_k$ находим:

$$\tau(r_k, 0) = \left(\sum_{i=1}^k + \sum_{i=1}^K \right) \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2} \Delta r_i. \quad (1.32)$$

Другой крайний случай – $\theta = \pi$. В этом случае имеем:

$$\tau(r, \pi) = \int_0^{R-r} \sigma(t-r) dt \tag{1.33}$$

Выберем k так, чтобы

$$r_{k-1} \leq r < r_k,$$

и представим интеграл (1.33) в виде:

$$\tau(r, \pi) = \left(\int_0^{r_k-r} + \int_{r_k-r}^{R-r} \right) \sigma(r+t) dt = \frac{\Delta r_k}{2} \sigma_k - \frac{(r-r_{k-1})^2}{2\Delta r_k} \sigma_k + \frac{(r_k-r)^2}{2\Delta r_k} + \sum_{i=k+1}^K \frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} \Delta r_i \tag{1.34}$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть вначале $\theta \geq \pi/2$. Представим интеграл (1.24) в виде:

$$\begin{aligned} \tau(r, \theta) &= \int_0^{r \cos \theta + \sqrt{r_k^2 - r^2 \sin^2 \theta}} \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt + \int_{r \cos \theta + \sqrt{r_k^2 - r^2 \sin^2 \theta}}^{r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}} \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt = \\ &= \left(\int_0^{r \cos \theta + \sqrt{r_k^2 - r^2 \sin^2 \theta}} + \sum_{i=k+1}^K \int_{t_{i-1}}^{t_i} \right) \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Здесь:

$$t_i = r \cos \theta + \sqrt{r_i^2 - r^2 \sin^2 \theta}, \tag{1.36}$$

а k определяется из условия:

$$r_{k-1} \leq r < r_k.$$

Каждый из слагаемых интегралов в правой части (1.35) вычисляется по заранее выбранной квадратурной формуле (например, по формуле Гаусса с двумя или тремя узлами). Подынтегральная функция рассчитывается по формуле линейной интерполяции. Интервалом интерполирования в первом интеграле служит отрезок $[r_{k-1}, r_k]$, а в последующих интегралах под знаком суммы — интервалы $[r_k, r_{k+1}]$, $[r_{k+1}, r_{k+2}]$ и т. д.

При $\theta = \pi/2$ формула (1.35) упрощается, а именно:

$$\tau(r, \pi/2) = \int_0^{\sqrt{r_k^2 - r^2}} \sigma(\sqrt{r^2 + t^2}) dt + \sum_{i=k+1}^K \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(\sqrt{r^2 + t^2}) dt \tag{1.37}$$

при t_i , определенном из соотношения: $t_i = \sqrt{r_i^2 - r^2}$.

Наконец, рассмотрим случай $\theta < \pi/2$. Пусть m и k — целые положительные числа, определяемые из условий:

$$r_{m-1} \leq r \sin \theta < r_m$$

и

$$r_{k-1} < r \leq r_k$$

соответственно. Представим интеграл (1.24) в виде:

$$\tau(r, \theta) = \left(\int_0^{t_1} + \int_{t_1}^{r \cos \theta} + \int_{r \cos \theta}^{r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}} \right) \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt, \quad (1.38)$$

где

$$t_i = r \cos \theta - \sqrt{r_{k-i}^2 - r^2 \sin^2 \theta}, \quad i=1, 2, \dots, k-m. \quad (1.39)$$

Чтобы вычислить последний интеграл в формуле (1.38), представим его в виде:

$$\int_{r \cos \theta}^{r \cos \theta + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}} \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt = \left(\int_{r \cos \theta}^{t_{k-m+1}} + \sum_{i=k-m+2}^{K-2m+k+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \right) \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt \cos \theta + t^2}) dt \quad (1.40)$$

при

$$t_j = r \cos \theta + \sqrt{r_{2m-k+j-1}^2 - r^2 \sin^2 \theta}, \quad j = k-m+1, \dots, K-2m+k+1.$$

Каждый из слагаемых интегралов вычисляется приближенно так же, как интегралы (1.35).

В следующей части статьи будет продолжено рассмотрение модели переноса излучения в сферической гетерофазной среде.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант №18-05-00812.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николайшвили Ш. С., Перадзе Р. К., Гонгадзе Ю. А., Гварамадзе М. Г., Канкия М. К. Построение модели свечения рассеивающего искусственного образования в условиях верхней атмосферы // Министерство народного образования Грузинской ССР, Научно-исследовательский институт прикладной математики им. академика Векуа Тбилисского государственного Университета. Отчет о научно-исследовательской работе (заключительный), № Гос.регистрации 01860003053, Тбилиси, 1990.
2. Беликов Ю. Е., Николайшвили Ш. С. и Перадзе Р. К. Модель рассеяния солнечного света на искусственном сферическом газодисперсном облаке в верхней атмосфере Земли // Космические исследования. – М.: Наука, 1993, Т.-31, вып.1, с.135—142.
3. Belikov Yu. E., Romanovsky Yu. A., Nikolaishvili Sh. S., Peradze R. Numerical model of scattering radiation in the earth atmosphere for scientific Investigations and applications // Phys. Chem. Earth (B), 2000, No. 5—6, pp.427—430.
4. Belikov Yu. E., Nikolaishvili Sh. S., Romanovsky Yu. A. A model of scattered radiation field in the Earth // Abstracts of The International Radiation Symposium IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation. Saint- Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, July 24—29, 2000, pp.76—77.
5. Belikov Yu. E., Gurvich A. V., Nicolaishvily S. Sh., Nicolaishvily Sh. S., Romanovsky Yu. A. Propagation of the solar radiation in the optical thick irregular medium // SPIE Proceedings, 1995, v.2580, pp.115—126.
6. Belikov Yu. E., Gurvich A. V. Images of optically thick artificial aerosol clouds in the near-Earth Space // Adv. Space Res., 1995, v.15, N12, pp.103—106.
7. Беликов Ю. Е., Гурвич А. В., Николайшвили Ш. С. Цветовая диагностика искусственных облаков в околоземном космическом пространстве // Космические исследования. – М.: Наука, 1993.- Т.31, N 1.- с.108—114.

8. Belikov Yu. E. Modelling of the twilight sky brightness using a numerical solution of the radiation transfer equation. // *J. of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1996, vol.58, No.16, pp.1843—1848.
9. Belikov Yu. E. Dependence of Solar Radiation in the Polar Stratosphere on the Distribution of Ozone and Stratospheric Aerosol // *J. Physics and Chemistry of the Earth, part B*, 2000, v.25, No. 5-6, 423—426.
10. Belikov Yu. E., Moeseyenko K. B. Influence of solar radiation attenuation by aerosol on the ozone content in the polar stratosphere // *Proceedings of the Quadrennial Ozone Symposium, Hokkaido University, Sapporo, Japan 3-8 July 2000*, p. 213—214.
11. Беликов Ю. Е. Оптические модели сферических гетерофазных сред в прикладной геофизике: Дис... доктора физ.-мат. наук: 25.00.29. – Защищена 16.05.2007; утв. 12.10.2007; 005272. – М., 2007. – 209 с.
12. Petropavlovskikh I., DeLuisi J., Herman B., Loughman, Bartia P. K., Mateer C. L., Lenoble J., and Belikov Yu. E. A comparison of radiance calculations by spherical atmosphere radiation transfer codes for modelling the Umkehr effect // *Proc. of the XVIII Quadrennial Ozone Symposium, L'Aquila, Italy.- 1996.- p.163—166.*
13. Postlyakov O. V., Masleev A. N., Antyufeev V. S., Ukhinov S. A., Belikov Yu. E., Nikolaishvili Sh. S., Gogohia V. V. A comparison of radiation transfer algorithms for modelling of the zenith sky radiance observations used for determination of stratospheric trace gases and aerosol // *Abstracts of The International Radiation Symposium IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation. Saint-Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, July 24—29, 2000*, pp.189—190.
14. Postlyakov O.V., Belikov Yu. E., Nikolaishvili Sh. S., Rozanov A. A comparison of radiation transfer algorithms for modelling of the zenith sky radiance observations used for determination of stratospheric trace gases and aerosol // *IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation, W. L. Smith and Yu. M. Timofeyev (Eds.). A. Deepak Publishing, Hampton, Virginia, 2001*, pp.885—888.
15. Дышлевский С.В., Беликов Ю. Е. Особенности вариаций потоков излучения в водородной линии Лайман-альфа в D-области ионосферы, Международный симпозиум «Атмосферная радиация и динамика» (МСАРД-2017) , 27—30 июня 2017 г., С.Петербург-Петродворец, тезисы доклада, с.257—259, <http://www.irc.phys.spbu.ru/msard17/thesis.pdf>
16. Mie G. A contribution to the optics of turbid media, especially colloidal metallic suspensions // *Annal. Phys.*, 1908, vol. 25, N 4, p.377—445.
17. Мак-Картни Э. Оптика атмосферы. – М.: Мир, 1979. – 421 с.
18. Зуев В. Е., Креков Г. М. Оптические модели атмосферы. - Л.:Гидрометеиздат, 1986. – 256 с.

MATHEMATICAL MODEL OF THE RADIATION TRANSFER IN THE SPHERICAL HETEROPHASE MEDIUM. PART 1

Yu. E. Belikov, S. V. Dyshlevsky, Sh. S. Nikolaishvili

The principles of the model formulation of the solar radiation transfer for the case of the spherical atmosphere are described. The general integral equation for the radiation transfer in the non-homogenous spherical symmetrical body of the specified radius, which accounts for the first-order scattering sources distribution, and approaches for its solution are given. The geometry of the problem setting is considered in details. The algorithms of the numerical solution of the radiation transfer equations using the method of the successive orders of scattering are presented. The calculation procedure for the heterophase medium optical parameters in a case of the discrete input data is described. Specifically, the calculation algorithms of the photon optical paths in various tracks inside the heterophase media are set out in details.

KEYWORDS: MATHEMATICAL MODELING, RADIATION TRANSFER, RADIATION SCATTERING, RADIATION ABSORPTION, PHASE FUNCTION