



УДК 621.3

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЗВЕШЕННОГО РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА

Д.Б. Рождественский

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

Получены оценки потенциальной погрешности восстановления взвешенного ряда Котельникова, ее зависимости от параметров степени подавления цифровой фильтрации и числа дискретных отсчетов, приходящихся на период составляющих исходного ряда.

Разработана методика оперативной оценки неопределенности прогнозирования, предназначенная для настройки алгоритма прогнозирования геофизических процессов и для сравнения с другими способами прогнозирования.

Проведена оценка прогнозируемости критической частоты слоя F2 и индексов солнечной активности.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ, НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ, ВЗВЕШЕННЫЙ РЯД КОТЕЛЬНИКОВА, ЗОНДИРОВАНИЕ ИОНОСФЕРЫ, КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА, ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод для прогнозирования состояния ионосферы и параметров солнечной активности, разработанный на основе принципа демодуляции, изложен в работе [1]. Этот же метод применялся в цифровых системах управления.

В настоящей статье дается количественная оценка погрешности восстановления взвешенного ряда Котельникова, на основе которого и разработан алгоритм прогнозирования. Для настройки параметров оптимального режима работы алгоритма экстраполяции введено понятие неопределенности прогнозирования или достоверности прогнозирования, представляющее собой функцию разности между результатами прогнозирования и реальным процессом. Понятие погрешности и неопределенности прогнозирования в современной литературе используется аналогично понятием погрешность и неопределенность измерения [2].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача экстраполяции реального процесса, заданного в виде дискретных отсчетов, решается путем восстановления дискретного процесса в непрерывную форму, поэтому для оценки погрешности или неопределенности прогнозирования используется метод восстановления, который является численным методом и принципиально приближенным, хотя бы из-за ограниченных возможностей технических средств.

Задача оценки разбивается на две части. В первой – оценивается потенциальная возможность метода, во второй – неопределенность прогнозирования, позволяющая проводить настройку алгоритма прогнозирования, путем выбора значений параметров управления алгоритмом прогнозирования.

Критерием достижения оптимальных значений параметров является минимум величины неопределенности прогнозирования.

3. ПРИВЕДЕННАЯ ОШИБКА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Алгоритм восстановления позволяет определить вклад отдельного отсчета в спектр процесса и в восстанавливаемую непрерывную функцию [3]. Если исходные отсчеты абсолютно точны, то погрешности восстановления возникают только потому, что выделяющая функция для постоянной величины применяется и при восстановлении гармонических процессов с ненулевыми частотами.

Постоянная величина может трактоваться как гармонический процесс $y(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ при $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

При бесконечно малом значении круговой частоты $\omega_0 \rightarrow 0$ и $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$: $y(t) = a_0 \sin \omega_0 t = a_0 \omega_0 t$.

Это прямая с угловым коэффициентом $a_0 \omega_0$ (a_0 может быть неограниченным), которая восстанавливается без погрешности только при четном числе отсчетов. В этом случае спектр выделяющей функции $F(\Omega)$ на границе окна равен нулю, и поэтому эффект «окна» проявляется во втором порядке малости. По этой причине целесообразно использовать четные числа отсчетов $m = 2N$.

Выделяющая функция для постоянной величины $e_0(d)$ может быть представлена как рядом

$$e_0(d) = \sum_{n=-(m-1)}^{m-1} b_n \frac{\sin \pi(d - 0,5n)}{\pi(d - 0,5n)}, \quad (1)$$

так и интегралом Фурье

$$e_0(d) = \int_{-\omega_H}^{\omega_H} F(\Omega) e^{j\pi d \frac{\Omega}{\omega_H}} d\Omega, \quad (2)$$

где $F(\Omega)$ – огибающая спектра конечного ряда Котельникова, $d = \frac{t}{\Delta\tau}$ – безразмерное время, $\Delta\tau$ – интервал дискретизации.

Если исходная частота отлична от нуля ($\omega_0 \neq 0$), то эффект «окна» приводит к изменению пределов интегрирования (2)

$$e(d) = \int_{-(\omega_H + \omega_0)}^{\omega_H - \omega_0} F(\Omega) e^{j\pi d \frac{\Omega}{\omega_H}} d\Omega \quad (3)$$

Отличие $e(d)$ от $e_0(d)$ и вызывает погрешности восстановления. Приведенная ошибка восстановления процесса определяется по формуле

$$\Delta = \frac{|e(d) - e_0(d)|}{|e_0(d)|}. \quad (4)$$

Так как $e(d)$ – комплексная величина и, строго говоря, не может считаться выделяющей функцией, то Δ не является точным значением и пригодна лишь как оценка.

Интеграл в (2) может быть представлен рядом

$$e(d) = \sum_{n=-(m-1)}^{m-1} b_n \frac{\sin \pi(d-0,5n)}{\pi(d-0,5n)} \cos \pi(d-0,5n) \frac{\omega_0}{\omega_H} +$$

$$+ j \sum_{n=-(m-1)}^{m-1} b_n \frac{\sin \pi(d-0,5n)}{\pi(d-0,5n)} \sin \pi(d-0,5n) \frac{\omega_0}{\omega_H} \quad (5)$$

являющимися разновидностью ряда Котельникова с несимметричными пределами интегрирования собственных спектров отчетов. Погрешность восстановления зависит от частоты исходного процесса ω_0 , согласно (5), а предельная приведенная ошибка на интервале частот $\omega_0 = 0 \div \omega_l$ близка к вычисленной по (1), (4) и (5) при замене в последней ω_0 на ω_l , где

$$\omega_l = \omega_H - \Omega_{cp} = \omega_H \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{K}\right) \quad (6)$$

Здесь предельная круговая частота исходного процесса находится из условия касания главного лепестка границы «окна»; K – параметр цифрового чебышевского фильтра. На рис.1 представлены приведенные ошибки восстановления взвешенного ряда Котельникова (ВРК) для $m = 17$ и $K = 1,25$ и экстраполяции на 0,5 интервала между отсчетами при различных значениях $\frac{\omega_0}{\omega_H}$ и функция $y(d)$ согласно (5).

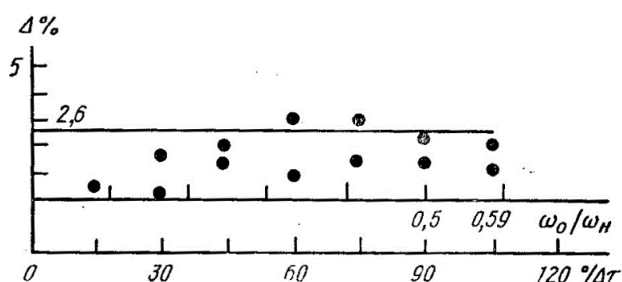


Рис. 1. Приведенные ошибки экстраполяции на 0,5 $\Delta\tau$ в зависимости от частоты при $K=1,25$; $m=17$.

В принципе возможно восстановление процесса сколь угодно высокой точности для любого момента времени как в пределах интервала задания, так и вне его путем выбора соответствующих числа отсчетов m и параметра K . В действительности же возможности дальнейшей экстраполяции значительно скромнее. Их ограничивает реализуемая точность задания исходных отсчетов.

Значения выделяющей функции являются суммой знакопеременного ряда вкладов весовых коэффициентов отсчетов. В области экстраполяции, по мере удаления от последнего отсчета, величины вкладов уменьшаются значительно медленнее, чем значения выделяющей функции. Следствием этого является быстрый рост взвешенных

вкладов отсчетов. Согласно выражению взвешенного ряда Котельникова

$$\tilde{y}_e(d) = \frac{y(d)}{e_0(d)} = \sum_{n=-(m-1)}^{m-1} y(n) b_n \frac{\sin \pi(d-0,5n)}{\pi(d-0,5n)} / \sum_{n=-(m-1)}^{m-1} b_n \frac{\sin \pi(d-0,5n)}{\pi(d-0,5n)} \quad (7)$$

взвешенный вклад отсчета с номером n равен:

$$\Delta \tilde{y}_e(d-0,5n) = y(n) \frac{b_n \frac{\sin \pi(d-0,5n)}{d-0,5n}}{\sum_{n=-(m-1)}^{m-1} b_n \frac{\sin \pi(d-0,5n)}{d-0,5n}} \quad (8)$$

Отсюда вес отсчета с номером n (множитель при $y(n)$) равен

$$C_n = \frac{b_n \frac{\sin \pi(d - 0,5n)}{d - 0,5n}}{\sum_{n=-(m-1)}^{m-1} b_n \frac{\sin \pi(d - 0,5n)}{d - 0,5n}}. \quad (9)$$

На рисунке 2 приведены графики весов отсчетов (пунктирные линии) с номерами $n=2$ и $n=16$ при $m=17$ и $K=1,25$. Быстрый рост весов, особенно средних отсчетов, может привести к большим погрешностям далеко экстраполированных значений. Вклады отсчетов с номерами $n=2$ и $n=16$ представлены пунктирными кривыми C_2 и C_{16} . Видно, что в области экстраполяции по абсолютной величине $C_{16} > C_2$. Т.е. вклад отсчета с номером $n=2$ в далекой области экстраполяции будет меньше, чем вклад отсчета с номером $n=16$.

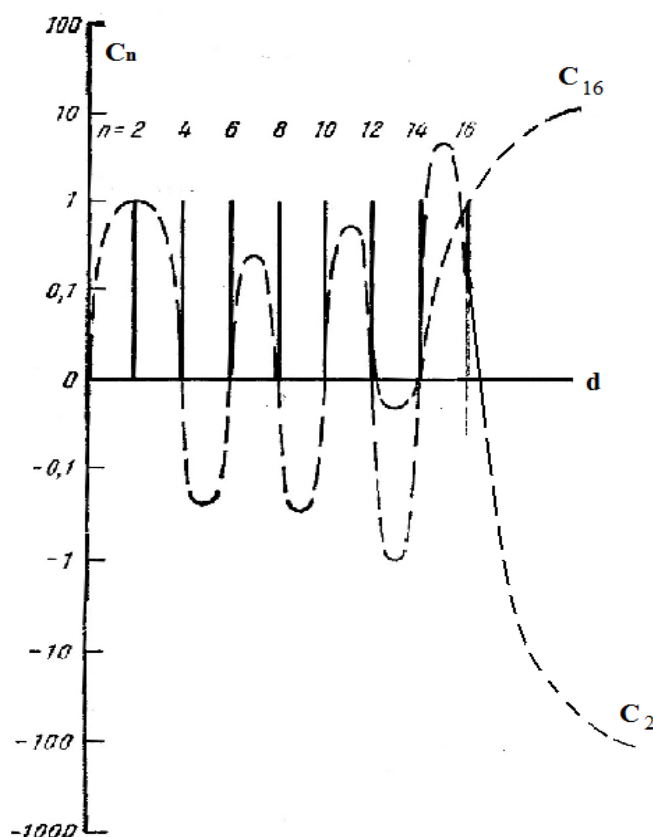


Рис. 2. Графики весов отсчетов $n=2$ и $n=16$ при $m=17$ и $K=1,25$.

По оси абсцисс отложено безразмерное время d , по оси ординат – величина вклада отсчета C_m . Соотношения между приведенными ошибками экстраполяции Δ и весами отсчетов C_{m-1} и $C_{\max}$ приведены на рис. 3. Наибольший вес $C_{\max}$ имеет отсчет для $n=1$, C_{m-1} – вес последнего отсчета. На рис. 3а представлены результаты экстраполяции на 0,5 шага, на рис. 3б – экстраполяция на 1 шаг для $K = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}; 2$ и $m=20; 10; 8$. При увеличении параметра K точность восстановления растет, а вес отсчета C_m падают.

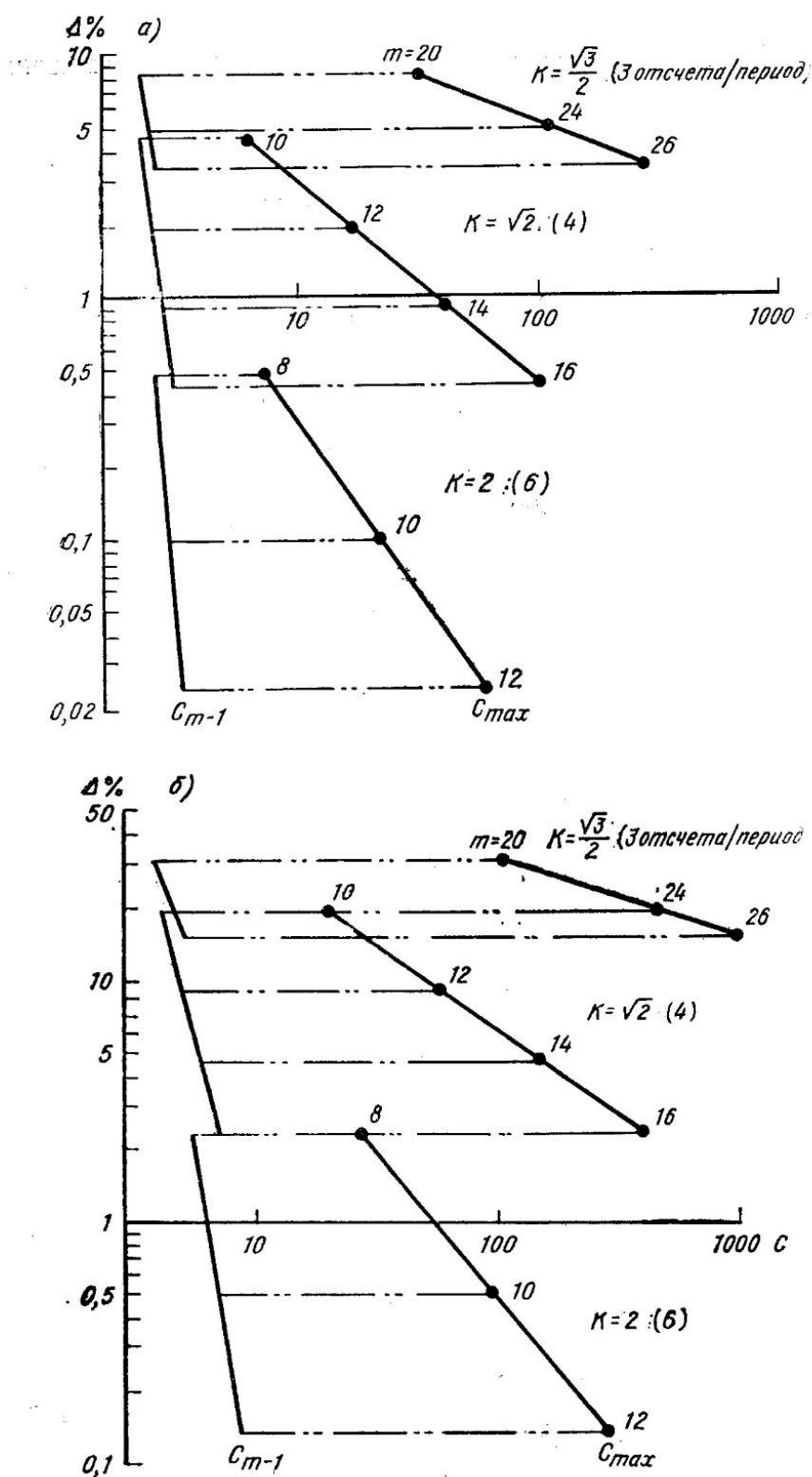


Рис.3. Приведенные ошибки экстраполяции на величины 0,5 (а) и 1,0 (б) интервалов в зависимости от весов отсчетов C_m . По оси абсцисс отложена величина вклада отсчета C_m , по оси ординат – приведенная ошибка экстраполяции.

Число отсчетов n_l , приходящихся на период предельной круговой частоты ω_l исходного процесса., полученное в работе [4], равно

$$n_l = \frac{2\omega_H}{\omega_l} = \frac{2}{1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{K}}, \quad (10)$$

где ω_H частота Найквиста, K – параметр Чебышевского фильтра.

Выражение (10) можно рассматривать, как достаточное условие дискретизации. Необходимым же условием дискретизации является следствие теоремы Котельникова, согласно которому на период исходного процесса должно приходиться не менее 2 отсчетов.

Как видно из (6) и равенства (10), росту K сопутствует снижение предельной частоты восстанавливаемого процесса. Так, при $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на период восстанавливаемого процесса должно

приходиться не менее 3 отсчетов, при $K = \sqrt{2}$ – не менее 4-х отсчетов и т.д. Поэтому целесообразно сравнивать параметры восстановления в едином времени, например, относительно периода составляющей процесса с наибольшей частотой. Такое сопоставление приведено на рис. 4 для экстраполяции на 1/6; 1/3 и 1/2 периода среза.

Выбор параметров восстановления K и m должен производиться с учетом спектра исходного процесса и совместно с выбором параметров фильтра, применение которого необходимо для устранения неопределенности в исходных отсчетах. Параметры, пригодные для любых спектров, могут быть неоптимальными для реального случая.

Если спектр исходного процесса – сплошной и неограниченный – типа «белый шум», то для устранения неопределенности необходима фильтрация, результат которой будет запаздывать не менее чем на полпериода составляющей среза, и только для того чтобы компенсировать потерю времени на фильтрацию, нужна экстраполяция также на полпериода составляющей среза. То есть, прогнозировать процесс, типа «белый шум» практически бессмысленно. Как видно из рис.4в, для этого случая предпочтительно применение $K = \sqrt{2}$, причем при точности экстраполяции $\approx 20\%$ ($m=16$) веса отсчетов будут лежать в пределах $20 \div 2000$. В данном случае обеспечение требуемой точности исходных отсчетов может оказаться затруднительным.

Если в спектре исходного процесса имеется провал, то затрата времени на фильтрацию может быть незначительной, а возможность прогноза более реальной. Например, если реальный процесс содержит в спектральном составе естественные составляющие, связанные с вращение Земли вокруг собственной оси, либо вокруг Солнца, то прогнозирование этих составляющих может быть получено с большей точностью, либо интервал экстраполяции может быть увеличен. Отсюда можно предполагать, что солнечные индексы прогнозируются значительно хуже, чем индексы ионосферы.

4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ НАСТРОЙКИ АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Величина неопределенности прогнозирования определяется из разности Δ между реальным процессом, подвергающимся прогнозированию и результатом прогнозирования. Эта разность имеет энергетический спектр $S(\omega_0)$, лежащий в интервале частот $\omega_0 = 0 \div \omega_l$. В качестве величины

неопределенности прогнозирования выбираем величину $E = \int_0^{\omega_l} S(\omega_0) d\omega_0$, равную энергии разности Δ

. Энергетический спектр $S(\omega_0)$ рассчитывается на интервале T . Если интервал экстраполяции T_0 превышает величину T , то функция неопределенности $E(t)$ может быть получена на интервале $T - T_0$.

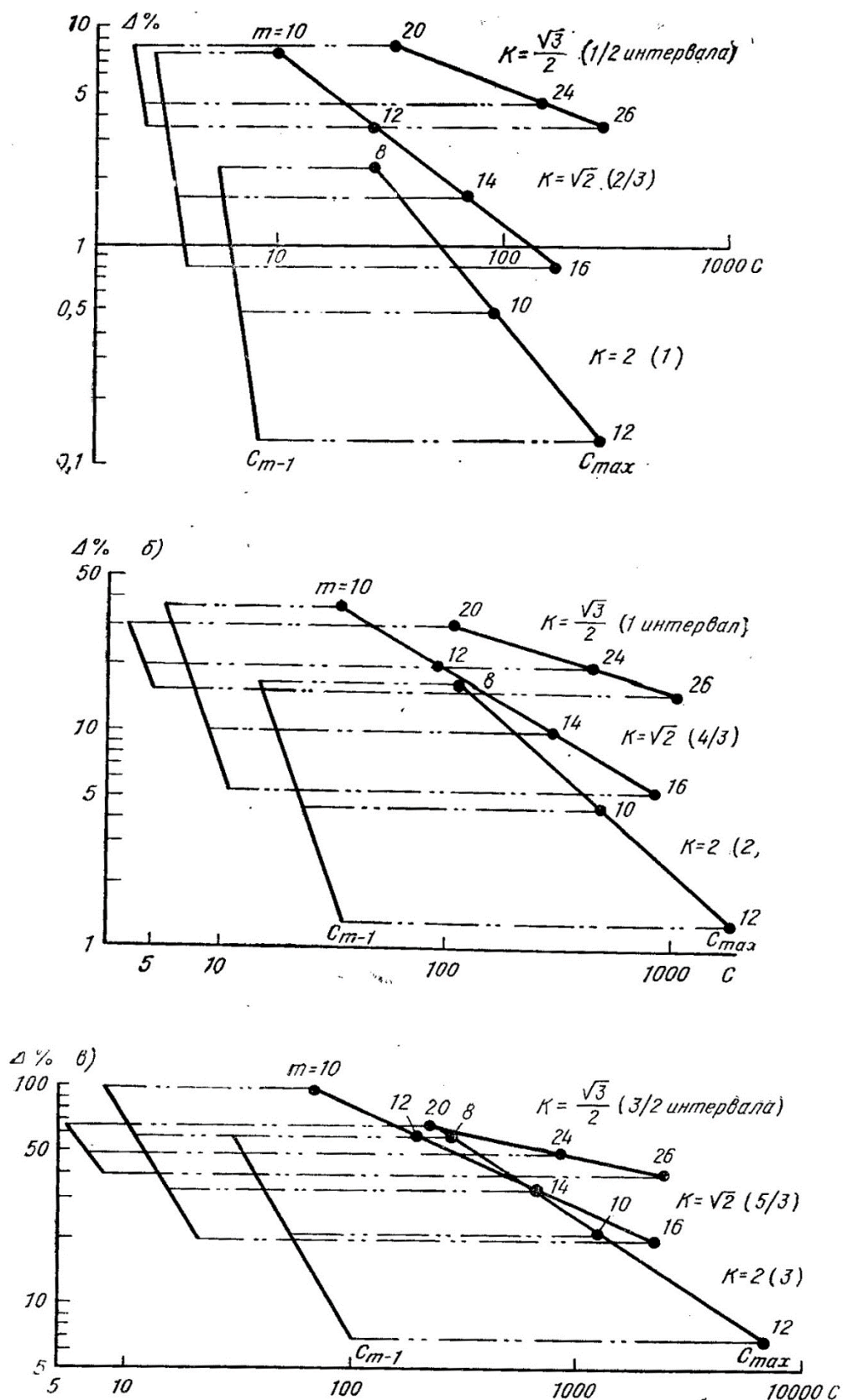


Рис. 4. Приведенные ошибки экстраполяции на 1/6 (а), 1/3 (б) и 1/2 (в) периода среза (Δ) в зависимости от весов отсчетов C_m . По оси абсцисс – вклад отсчета C_m , по оси ординат – приведенная ошибка восстановления $\Delta\%$.

В алгоритме экстраполяции входят ряд параметров, как-то: параметры, определяющие ограниченность спектра исходного процесса и выделяющей функции, параметры используемых фильтров, длина исходной выборки и другие, от которых зависит качество экстраполяции. Оптимальный подбор этих параметров определяется минимальным значением неопределенности прогнозирования E .

Цель разработки такого параметра, как неопределенность прогнозирования заключалась в создании методики выбора параметров управления алгоритмом прогнозирования для получения оптимального режима прогнозирования. Этот же параметр может служить для сравнения метода экстраполяции, разработанного на основе демодуляции, с другими методами прогнозирования. Суть предлагаемой методики заключается в построении функции разности значений реального процесса и результата экстраполяции. В качестве величины неопределенности прогнозирования выбирается энергия «функции разности». Расчет энергии «функции разности» производится путем получения энергетического спектра этой функции с последующим интегрированием спектра по частоте. Неопределенность как энергия не зависит от знака разности.

Определенный интеграл дискретного процесса рассчитывается по формуле:

$$f(\Delta) = \sum_{n=1}^N y(n)\Delta\tau + \sum_{n=1}^N y'(n)\frac{\Delta\tau^2}{2!} + \sum_{n=1}^N y''(n)\frac{\Delta\tau^3}{3!} + \dots, \quad (11)$$

где $y(n)$ – дискретные отсчеты; N – число дискретных отсчетов, $\Delta\tau$ – интервал дискретизации.

Функция $f(\Delta)$ соответствует энергии процесса, представляющего собой изменение во времени разности между точным значением прогнозируемой величины и результатом прогнозирования, и имеет размерность энергии.

Неопределенность прогнозирования представлена как энергия разности между истинным значением и значениями процесса, полученными в результате экстраполяции. Неопределенности прогнозирования, как энергия функции различия $f(\Delta)$ на заданном интервале экстраполяции T_0 является интегральной оценкой, а дифференциальная оценка – средняя мощность $\frac{f(\Delta)}{T_0}$.

Энергетическую оценку целесообразно использовать при выборе параметров цифровой обработки и при сравнении разных методов обработки. Результат такой оценки на «Панели управления» выдается в форме вещественного числа в окне символьного редактора Intgr.

Дифференциальная оценка определяет качество экстраполяции на различных участках исследуемого ряда данных.

На рисунке 5 представлен результат оптимального подбора параметров для относительной оценки неопределенности и графического отображения ее компонент: дифференциальная неопределенность E в зависимости от интервала прогнозирования. Интегральное значение неопределенности на этом интервале, отображенное в окне Intgr, равно 4,2137.

Первичная обработка заключается в применении методов цифровой фильтрации для формирования ограниченного по спектру процесса, что является необходимым условием прогнозируемости. Величина интервала прогнозирования зависит от ширины спектра прогнозируемого процесса и степени подавления фильтров в полосе среза. Выбор оптимальных значений ширины полосы и коэффициентов подавления являются регулируемыми параметрами обработки исходной информации. Варьируя этими величинами выбираем их оптимальное значение по заданному $\min$ неопределенности прогнозирования. Исследования показали, что наименьшая величина неопределенности имеет место при первичной обработке данных с помощью фильтров Чебышева, которые дают минимальные искажения по сравнению с методом скользящего среднего и скользящей медианы. После фильтра Чебышева ставится специальный фильтр, функционирующий в частотной области, с помощью которого увеличивается степень подавления в полосе среза, не изменяя характера спектра прогнозируемого процесса в полосе пропускания.

Методика настройки параметров, описанная выше, может быть успешно использована для параметров первичной обработки при прогнозе суточного хода, долгопериодных составляющих и высокочастотных вариаций критической частоты.

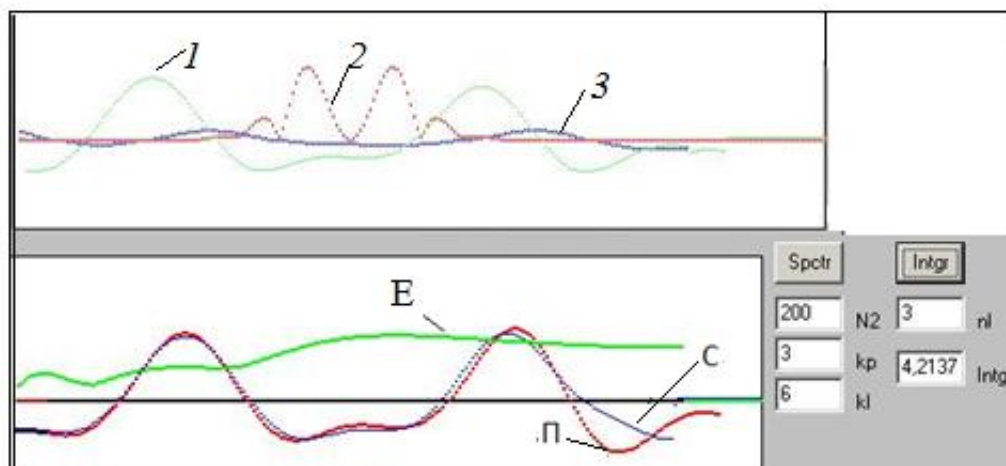


Рис. 5. Фрагмент «Панели управления» для оптимального подбора параметров:

Spctr – кнопка включения модуля «Спектр»; Intgr – кнопка расчета интеграла; N2 – число отсчетов, по которому определяется спектр; kp – степень подавления для расчета функции окна; kl – масштабный множитель при расчете спектра; nl – число членов ряда (1); Е – дифференциальная неопределенность, П – прогноз, С – результаты суточного хода на выходе второго фильтра; 1- измеренные значения критической частоты в течение двух суток, 2 - спектр суточного хода критической частоты, 3 - производная от суточного хода.

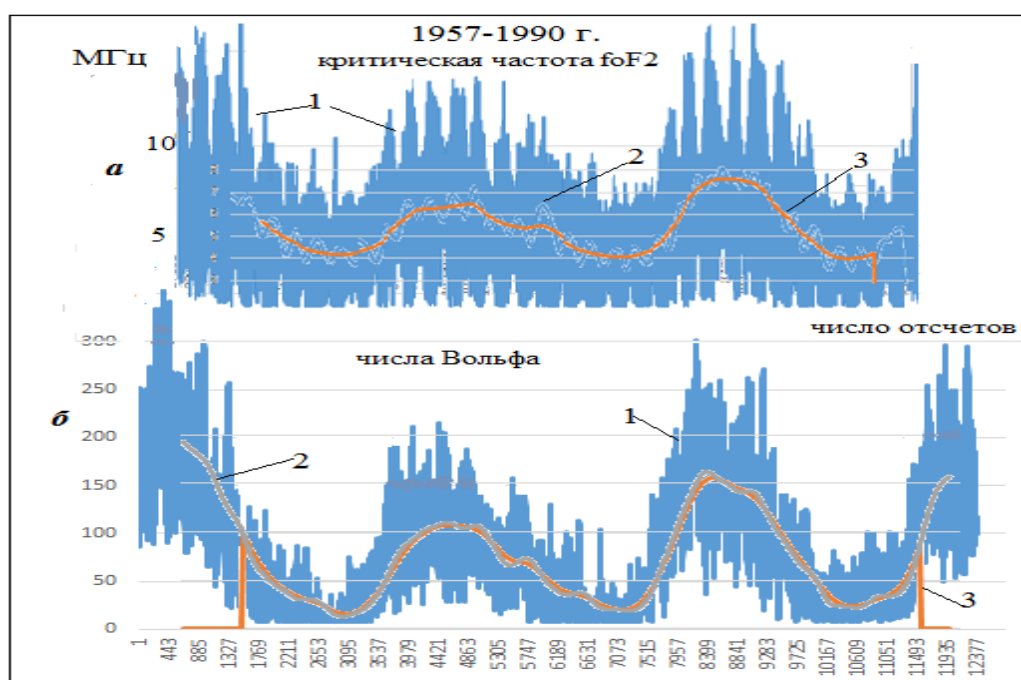


Рис. 6. Результаты фильтрации с помощью цифрового чебышевского фильтра: а – критическая частота слоя F2, б – числа Вольфа: 1- исходный ряд; 2 - годовой ход; 3- одиннадцатилетний цикл.

Из спектральных характеристик скользящего среднего и скользящей медианы следует появление ложной составляющей в выходной последовательности для скользящего среднего и существенное изменение спектральной характеристики выходной последовательности для скользящей медианы.

Проверка полученных результатов проводилась на рядах ионосферных данных критической частоты слоя F2 и чисел Вольфа за 1957-1990 гг. Использование фильтров Чебышева с АЧХ близкой с

АЧХ исправленного непрерывного осреднения при анализе длинных рядов показали, что неопределенность прогнозирования для чисел Вольфа значительно превышает тот же параметр для критической частоты слоя $foF2$, так что прогноз чисел Вольфа может быть достоверным на 1-2 года, а достоверный прогноз критической частоты возможен на период 2–3 раза больше (рис. 7).

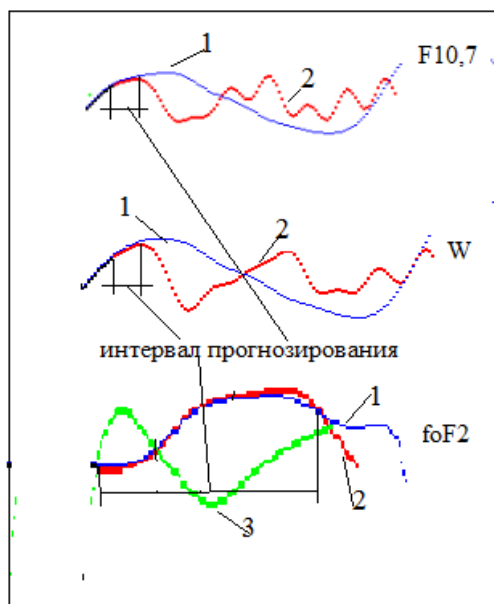


Рис. 7. Фрагмент панели управления. Сравнение интервалов прогнозирования параметров ионосферы и индексов солнечной активности.
1- исходный процесс, 2 – прогноз исходного процесса,
3 – дифференциальная неопределенность прогнозирования E .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования неопределенности прогнозирования получено, что имеющие место трудности в использовании известных ионосферных моделей семейства IRI 2007, 2011, 2016 и др., [5] и необходимость их коррекции, связана с недостаточным учетом долгопериодных 11-летних вариаций солнечной активности, которые плохо поддаются прогнозированию в силу стохастического характера данных наблюдения.

6. ВЫВОДЫ

1. Получена оценка потенциальной погрешности методов восстановления и прогнозирования дискретного процесса.
2. Разработан алгоритм численной оценки неопределенности прогнозирования, который может быть использован при настройке параметров алгоритма прогнозирования и для сравнения разных методов прогнозирования.
3. Согласно анализу алгоритма экстраполяции потенциальная погрешность прогнозирования может быть получена сколь угодно малой, в зависимости от выбора параметра фильтрации K и числа отсчетов n на период гармоника процесса.
4. При построении эмпирических справочных моделей ионосферы требуется учитывать влияние фактора 11-летней активности Солнца.
5. Интервалы прогнозирования ионосферных данных существенно превышают интервалы прогнозирования индексов солнечной активности.

На рисунке 6б представлены под цифрой 3 результаты цифровой чебышевской фильтрации одиннадцатилетней активности Солнца. Величина изменения критической частоты у 11-летней составляющей лежит в пределах 4 – 8 МГц. Такие изменения не учитываются в эмпирических справочных моделях $foF2$ и моделях подобного типа, что приводит к необходимости периодического их уточнения.

Для получения характеристик прогнозируемости долгопериодных вариаций критической частоты $foF2$, потока $F10,7$ и чисел Вольфа проведено прогнозирование долгопериодных колебаний на интервале 1957 – 1975 гг. Результаты прогнозирования с величиной интервала удовлетворительного прогнозирования (горизонтальный отрезок, ограниченный двумя вертикальными линиями) представлены на рис. 7. Параметры прогнозирования для каждого случая выбирались отдельно, чтобы получить оптимальные результаты прогнозирования. Как видно из рисунка, параметр ионосферы $foF2$ имеет больший интервал прогнозирования, чем солнечные параметры W и $F10,7$.

Таким образом, наблюдается относительная неустойчивость прогнозирования солнечных параметров.

6. Для получения информации о состоянии ионосферы в интересах контроля воздушно-космического пространства требуются оперативные эмпирические модели, построенные на основе алгоритмов прогнозирования и оперативного получения данных о состоянии ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рожественский Д.Б. Методические основы цифрового управления // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2011. №9. С. 7-14.
2. Государственная система обеспечения единства измерений. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений. Р 50.2.038.2004
3. Рожественский Д.Б. Восстановление непрерывной функции по выборке конечного числа равноотстоящих отсчетов. //Радиотехника. 2006, №2. С.23-27
4. Рожественский Д.Б., Иванова И.Н. Настройка цифрового регулятора с алгоритмом экстраполяции в контуре обратной связи. //Промышленные АСУ и контроллеры. 2013. №5. С. 31–37.
5. Деминов М.Г., Деминова Г.Ф. Индекс солнечной активности для долгосрочного прогноза критической частоты F2-слоя. // Геомагнетизм и аэрномия. 2019. Т. 59, №2, С. 191–198

QUANTITATIVE EVALUATION OF ERRORS AND UNCERTAINTY OF RESTORATION AND FORECAST OF THE WEIGHED KOTELNIKOV'S SERIES

Rozhdestvensky D. B.

Estimates are obtained of the potential error in reconstructing the weighted Kotelnikov series and its dependence on the parameters of the degree of suppression of digital filtering and the number of discrete samples per component of the initial series.

A methodology has been developed for the operational assessment of forecasting uncertainty, designed to configure the algorithm for predicting geophysical processes and compare it with other forecasting methods. The predicted critical frequency of the F2 layer and solar activity indices were estimated

KEYWORDS: POTENTIAL ERROR, FORECASTING UNCERTAINTY, WEIGHED KOTELNIKOV'S ROW, IONOSPHERE SENSING, CRITICAL FREQUENCY, DIGITAL SIGNAL PROCESSING