ГЕЛИОГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫПУСК 18, 18 – 31 , 2018

ТЕХНОЛОГИИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

ISSN 2304-7380

Поступила в редакцию 13.04.2018 г.

УДК 519.6:551.521

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕТЕРОФАЗНОЙ СРЕДЕ. ЧАСТЬ 2

Ю. Е. Беликов, С. В. Дышлевский, Ш. С. Николайшвили

Продолжается рассмотрение модели переноса излучения в сферической гетерофазной среде, которое было начато в предыдущей первой части статьи [1]. Приводится основные алгоритмы решения уравнения переноса излучения: интегрирование уравнения переноса вдоль фиксированного луча, расчет распределения поля однократно рассеянного излучения и расчета интеграла рассеяния в целом.

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ, ПОЛЕ РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ.

2.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ВДОЛЬ ФИКСИРОВАННОГО ЛУЧА

Задача сводится к расчету интеграла:

$$v(r,\psi;\theta,\alpha) = \int_0^{r\cos\theta+\sqrt{R-r^2\sin^2\theta}} u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)e^{-\tau(r,\theta,s)}ds\,, \tag{2.1}$$

$$\tau(r,\theta,s) = \int_0^s \sigma(\sqrt{r^2-2rt\cos\theta+t^2})dt\,, \tag{2.2}$$

$u(r,\psi;\theta,\alpha)$ — заданная непрерывная функция, переменные r_s , ψ_s , θ_s , α_s вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} r_s = \sqrt{r^2-2rs\cos\theta+s^2}\,, \\[2ex] \cos\psi_s = \dfrac{r\cos\psi - s\mu_1}{r_s}, \\[2ex] \cos\psi_s = \dfrac{r\cos\psi - s\mu_1}{r_s}, \\[2ex] \cos\alpha_s = \dfrac{\mu_1 - \cos\psi_s\cos\theta_s}{\sin\psi_s\sin\theta_s} \end{cases} \tag{2.3}$$

Беликов Юрий Евгеньевич, ФГБУ «ИПГ», заведующий лабораторией, т.(499) 181-61-22, e-mail: yury_belikov@mail.ru
Дышлевский Сергей Викторович, с.н.с., ФГБУ «ИПГ», e-mail: sergiodd@mail.ru

при вспомогательном обозначении:

$$\mu_1 = \cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\alpha \tag{2.4}$$

В дальнейшем считается, что $r = r_k$, где r_k, k=0,1,…,K — один из узлов заранее заданного разбиения интервала $[0, R]$ по переменной r.

Пусть вначале $\theta \geq \pi/2$. Тогда при k=K

$$v(r_k,\psi_k;\theta,\alpha) = 0\,, \tag{2.5}$$

Рассмотрим значения k=1,2,…,K-1. Запишем интеграл (1.41) в виде суммы:

$$v(r_k,\psi_k;\theta,\alpha) = \sum_{i=1}^{K-k}\int_{s_{i-1}}^{s_i} u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)e^{-\tau(r,\theta,s)}ds\,, \tag{2.6}$$

где

$$s_i = r_k\cos\theta + \sqrt{r_{k+i}^2 - r_k^2\sin^2\theta}\,,\ \text{i=0,1,…,K.} \tag{2.7}$$

В слагаемых интегралах (1.46) перейдем к новой переменной интегрирования

$$\tau = \int_0^s \sigma(\sqrt{r_k^2 - 2r_k t\cos\theta + t^2})dt \tag{2.8}$$

Тогда вместо (1.46) будем иметь:

$$v(r_k,\psi;\theta,\alpha) = \sum_{i=1}^{K-k}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)\frac{e^{-\tau}d\tau}{\sigma(r_s)}, \tag{2.9}$$

где

$$\tau_i = \int_0^{s_i} \sigma(\sqrt{r_k^2 - 2r_k t\cos\theta + t^2})dt\,. \tag{2.10}$$

Будем считать функцию $u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)/\sigma(r_s)$ линейной функцией τ на каждом из частных интервалов $[\tau_{i-1},\tau_i]$, т. е. полагать

$$\frac{u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)}{\sigma(r_s)} = \frac{\tau-\tau_{i-1}}{\Delta\tau_i}\frac{u_i}{\sigma_{k+i}} + \frac{\tau_i-\tau}{\Delta\tau_i}\frac{u_{i-1}}{\sigma_{k+i-1}}\,, \tag{2.11}$$

где

$$\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}\,,\ \text{i=1,2,…,K} - \text{k} \tag{2.12}$$

и

$$u_i = u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)\,|_{s=s_i}\,,\ \text{i=0,1,…,K} \tag{2.13}$$

Если подставить аппроксимацию (2.11) в (2.9) и выполнить интегрирование по τ , получим:

$$v(r_k,\psi;\theta,\alpha)=\sum_{i=1}^{K-k}e^{-\tau_{i-1}}(A_i\frac{u_i}{\sigma_{k+i}}+B_i\frac{u_{i-1}}{\sigma_{k+i-1}}), \tag{2.14}$$

где

$$A_i=\frac{1-e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i}-e^{-\Delta\tau_i},\quad B_i=1-\frac{1-e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i} \tag{2.15}$$

Величины $\Delta\tau_{i-1}$ рассчитываются рекуррентно:

$$\tau_i=\tau_{i-1}+\Delta\tau_i,\ \text{i=1,2,…,K} \tag{2.16}$$

$$\tau_0=0,$$

а приращение $\Delta\tau_i$, равное интегралу

$$\Delta\tau_i=\int_{s_{i-1}}^{s_i}\sigma(\sqrt{r_k^2-2r_kt\cos\theta+t^2})dt \tag{2.17}$$

по квадратурной формуле Гаусса с двумя или тремя узлами; подынтегральная функция на интервале интегрирования аппроксимируется линейным выражением:

$$\sigma(r)=\frac{r-r_{r+i-1}}{\Delta r_{k+i-1}}\sigma_{k+i}+\frac{r_{k+i}-r}{\Delta r_{k+i-1}}\sigma_{k+i-1},\ \text{i=1,2,…,K}, \tag{2.18}$$

$$\Delta r_{i-1}=r_i-r_{i-1}.$$

Целесообразно отдельно рассмотреть случай $\theta=\pi$. При этом:

$$\begin{gathered} r_1=r_k+s, \\ \cos\theta_s=-1, \\ \cos\psi_s=\cos\psi, \end{gathered} \tag{2.19}$$

а от переменной α_s подынтегральная функция не зависит. Интеграл (2.17) рассчитывается по формуле:

$$\Delta\tau=\int_{s_{i-1}}^{s_i}\sigma(\sqrt{r_k^2-2r_kt\cos\theta+t^2})dt=\frac{\Delta r_{k+i-1}}{2}(\sigma_{k+i}+\sigma_{k+i-1}), \tag{2.20}$$

т. к. $s_i=r_{k+i}$, а вместо (2.13) имеем:

$$u_i=u(r_{k+i},\psi;\pi,\alpha_s), \tag{2.21}$$

от параметра α_s правая часть последнего соотношения не зависит.

Итак, при $\theta=\alpha$ расчет интеграла $v(r_k,\psi;\theta,\alpha)$ осуществляется по общей формуле (2.14), интегралы (2.17) вычисляются по формуле (2.18) без привлечения квадратурной формулы Гаусса, а расчет подынтегральной функции $u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)$ не требует обращения к формулам (2.3).

Для полноты наших рассмотрений остановимся отдельно на случае k=0, полагая по-прежнему $\theta\geq\pi/2$. Из непрерывности рассчитываемого интеграла следует, что в центре сферы, т. е. при r=0, функция $v(r,\psi;\theta,\alpha)=v(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ не зависит от параметра ψ, но зависит от направления $\mathbf{\Omega}$. Если обозначить через θ_z угол, образованный вектором Ω с осью O_z, то для $v(0,\mathbf{\Omega})=v_c(0,\theta_z)$ будем иметь:

$$v_c(0,\theta_z)=\sum_{i=1}^{K}e^{-\tau_{i-1}}(A_i\frac{u_i}{\sigma_i}+B_i\frac{u_{i-1}}{\sigma_{i-1}}) \tag{2.22}$$

коэффициенты A_i и B_i рассчитываются по формулам (2.15), интегралы (2.17) – по формуле (2.20) при k=0, а величины u_i по формуле:

$$u_i=u(r_i,\pi-\theta_z;\pi,\alpha_s) \tag{2.23}$$

от параметра α_s значения правой части не зависят. Заметим, что в силу осевой симметрии задачи функция $v(0,\mathbf{\Omega})$ не зависит от азимутального угла α. Заметим также, что излагаемая ниже схема расчетов не требует вычислений подынтегральной функции $u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)$ в центре сферы.

До сих пор рассматривались направления $\mathbf{\Omega}$ с $\theta\geq\pi/2$. Обратимся к случаю $\theta<\pi/2$, полагая $k\geq1$. Пусть m— натуральное число, определенное из условий:

$$r_{m-1}\leq r_k\sin\theta<r_m, \tag{2.24}$$

и пусть s_i, где i=0,1,2,…,K+k-2m+1, значения s, которые рассчитываются по формулам:

$$s_i=\begin{cases} r_k\cos\theta-\sqrt{r_{k-i}^2-r_k^2\sin^2\theta}, i=0,1,...,k-m \\ r_k\cos\theta+\sqrt{r_{i-k+2m-1}^2-r_k^2\sin^2\theta}, i=k-m+1,...,K+k-2m+1 \end{cases} \tag{2.25}$$

Интеграл (1.41) при $r=r_k$ представим в виде суммы:

$$v(r_k,\psi;\theta,\alpha)=\sum_{i=1}^{K+k-2m+1}\int_{s_{i-1}}^{s_i}u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)e^{-\tau(r,\theta,s)}ds \tag{2.26}$$

Так же как при переходе к формуле (2.14) введем новую переменную интегрирования τ, на каждом из интервалов (τ_{i-1},τ_i) аппроксимируем подынтегральную функцию (без экспоненциального множителя) линейным выражением относительно τ. Таким путем найдем:

$$v(r_k,\psi;\theta,\alpha)=\sum_{i=1}^{K+k-2m+1}e^{-\tau_{i-1}}(A_i\tilde{u}_i+B_i\tilde{u}_{i-1}), \tag{2.27}$$

Где

$$s_i = \begin{cases} \dfrac{u(r_{k-i}, \psi_s; \theta_s, \alpha_s)|_{s=s_i}}{\sigma_{k-i}}, i = 1, 2, ..., k-m \\ \dfrac{u(r_{k-i+2m-1}, \psi_s; \theta_s, \alpha_s)|_{s=s_i}}{\sigma_{i-k+2m-1}}, i = k-m+1, ..., K+k-2m+1 \end{cases} \tag{2.28}$$

Коэффициенты A_i и B_i рассчитываются по прежним формулам (2.15), величины τ_i — рекуррентно по формулам (2.16), а приращение $\Delta\tau_i$ — по формулам квадратуры Гаусса. При этом, подынтегральная функция $\sigma(\sqrt{r_k^2 - 2r_k t\cos\theta + t^2})$ на интервале (s_{i-1}, s_i) вычисляется по интерполяционным формулам:

$$\sigma(r) = \begin{cases} \dfrac{r - r_{k-i}}{\Delta r_{k-i}} \sigma_{k-i+1} + \dfrac{r_{k-i+1} - r}{\Delta r_{k-i}} \sigma_{k-i}, i = 1, 2, ..., k-m \\ \dfrac{r - r_{j-1}}{\Delta r_{j-i}} \sigma_j + \dfrac{r_j - r}{\Delta r_{j-1}} \sigma_{j-1}, i = k-m+1, ..., K+k-2m+1 \end{cases} \tag{2.29}$$

здесь использовано вспомогательное обозначение $j = i - k + 2m - 1$.

При $\theta = 0$ расчетные формулы упрощаются. Во-первых, вместо общих формул (2.3) можно воспользоваться соотношениями

$$\begin{cases} r_s = |r_k - s| \\ \cos\theta_s = sign(r_k - s) \\ \cos\psi_s = sign(r_k - s)\cos\psi \end{cases} \tag{2.30}$$

переменная α_s не определена, но она и не нужна, т. к. подынтегральная функция от α_s не зависит.

Формулы (2.15) при $\theta = 0$ преобразуется к виду:

$$s_i = \begin{cases} r_k - r_{k-i}, i = 0, 1, ..., k-1 \\ r_k + r_{i-k+1}, i = k, k+1, ..., K+k-1 \end{cases} \tag{2.31}$$

а вместо формул (2.27) получаем

$$v(r_k, \psi; \theta, \alpha) = \sum_{i=1}^{K+k-1} e^{-\tau_{i-1}} (A_i \tilde{u}_i + B_i \tilde{u}_{i-1}), \tag{2.32}$$

где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} \dfrac{u(r_{k-i}, \psi; 0, \alpha)}{\sigma_{k-i}}, i = 1, 2, ..., k-1 \\ \dfrac{u(r_{i-k+1}, \pi - \psi; \pi, \alpha)}{\sigma_{i-k+1}}, i = k, ..., K+k-1 \end{cases} \tag{2.33}$$

Наконец, приращения $\Delta\tau_i$ следует вычислять по формулам:

$$\Delta\tau_i = \begin{cases} \frac{\Delta\tau_{k-i}}{2}(\sigma_{k-i}+\sigma_{k-i+1}), i=1,2,...,k-1 \\ \Delta r_1(\sigma_0+\sigma_1), i=k \\ \frac{\Delta\tau_{i-k}}{2}(\sigma_{i-k+1}+\sigma_{i-k}), i=k+1,...,K+k-1 \end{cases} \qquad (2.34)$$

При выбранной нами схеме значений подынтегральной функции $u(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)$ при $s=r_k$ (т. е. в центре сферы) не требуется.

Полученные выше формулы теряют смысл, если расчетная точка (r_k,ψ) оказывается на оси O_z. Это происходит из-за того, что при s=0 знаменатель последней из формул (2.3) обращается в нуль. Полагая $\psi=0$ в третьей из формул (2.3) найдем:

$$\cos\psi = \frac{r_k - s\cos\theta}{r_s} \qquad (2.35)$$

Следовательно,

$$\sin\psi_s = \frac{s\sin\theta}{r_s}. \qquad (2.36)$$

Вторая из формул (2.3) дает:

$$\sin\theta_s = \frac{r_s\sin\theta}{r_s} \qquad (2.37)$$

Если подставить формулы (2.35), (2.36) и (2.37) в последнюю из формул (2.3), то получим:

$$\cos\alpha_s = 1,\ \psi=0. \qquad (2.38)$$

Аналогичным путем найдем:

$$\cos\alpha_s = -1,\ \psi=\pi \qquad (2.39)$$

Итак, при $\psi=0$ или $\psi=\pi$ значение $v(r_k,\psi;\theta,\alpha)$ рассчитывается по формуле (2.14) при $\theta\ge\pi/2$ и по формуле (2.27) при $\theta<\pi/2$ с параметрами ψ_s и α_s, определяемыми по формулам (2.35), (2.36) и (2.37). Заметим, что значение $v(r_k,\psi;\theta,\alpha)$ при $\psi=0$ или при $\psi=\pi$ от параметра не α зависит.

Будем предполагать, зато (r_k,ψ) точка не лежит на оси O_z. Возможно, что при некотором **s** из интервала интегрирования

$$(0, r_k\cos\theta + \sqrt{r_k^2 - 2r_k s\cos\theta + s^2}) \qquad (2.40)$$

точка (r_k,ψ_s) оказывается на оси O_z. Этого не может быть, если параметр α отличен от нуля и от π. Если же имеет место одно из равенств $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$, то точка (r_k,ψ_s) может оказаться на оси O_z

только в том случае, когда выполняется дополнительное условие $\theta < \psi$ при $\alpha = 0$ и $\theta < \pi - \psi$ при $\alpha = \pi$.

При одновременном выполнении условий $\alpha = 0$ и $\theta < \psi$ параметр под знаком интеграла (2.1) сохраняет постоянное значение $\alpha_s = 0$, пока имеет место неравенство

$$s < \overline{s} = r_k \sin\psi / \sin(\psi - \theta) \tag{2.41}$$

В точке $s = \overline{s}$ параметр α_s испытывает скачок, а при $s > \overline{s}$ сохраняет постоянное значение $\alpha = \alpha_s$. В том же случае, когда одновременно выполняются условия $\alpha = \pi$ и $\theta < \pi - \psi$, параметр α_s определяется из соотношений

$$\alpha_s = \begin{cases} \pi, s < \overline{s} \\ 0, s > \overline{s}, \end{cases} \tag{2.42}$$

где

$$\overline{s} = r_k \sin\psi / \sin(\psi + \theta) \tag{2.43}$$

Ясно, что при $\overline{s} > r_k \cos\theta + \sqrt{R^2 - r_k^2 \sin^2\theta}$ точка разрыва параметра α_s оказывается вне интервала интегрирования.

2.2. РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОКРАТНО РАССЕЯННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Распределение однократно рассеянной составляющей представляется интегралом:

$$\Phi^{(1)}(r,\psi;\theta,\alpha) = \int\limits_0^{r\cos\theta + \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\theta}} F^{(1)}(r_s,\psi_s;\theta_s,\alpha_s) e^{-\tau(r,\theta,s)} ds\,. \tag{2.44}$$

Здесь:

$$F^{(1)}(r,\psi;\theta,\alpha) = \sigma_s(r) g(r,-\mu_0) e^{-\tau(r,\pi-\psi)} \tag{2.45}$$

$$\mu_0 = \cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\alpha \tag{2.46}$$

и

$$\tau(r,\theta) = \int\limits_0^{r\cos\theta + \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\theta}} \sigma(\sqrt{r^2 - 2rt\cos\theta + t^2})dt\,, \tag{2.47}$$

остальные обозначения совпадают с ранее принятыми.

Для расчета функции $\Phi^{(1)}(r,\psi;\theta,\alpha)$ в узлах $r \le r_k$ можно воспользоваться процедурой, описанной в предыдущем разделе. Здесь же ограничимся описанием схемы расчета интеграла (2.47), полагая по-прежнему $r = r_k$.

Если в (2.47) положить $\theta = 0$, то найдем:

$$\tau(r_k,0) = \int\limits_0^{R+r_k} \sigma(|r_k - t|)dt = \int\limits_0^{r_k} \sigma(r_k - t)dt + \int\limits_{r_k}^{R+r_k} \sigma(t - r_k)dt = \int\limits_0^{r_k} \sigma(t)dt + \int\limits_0^{R} \sigma(t)dt \tag{2.48}$$

Считая, как и прежде, $\sigma(t)$ линейной функцией на каждом из интервалов $[r_{i-1}, r_i]$, i=1,2,…,K, из последнего равенства найдем приближенно:

$$\sigma(r_k,0) = (\sum_{i=1}^{k} + \sum_{i=1}^{K})\frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2}\Delta r_{i-1}, \quad \Delta r_{i-1} = r_i - r_{i-1} \tag{2.49}$$

Если же $\theta = \pi$, то вместо (2.47) будем иметь

$$\tau(r_k,\pi) = \int_0^{R-r_k} \sigma(r_k + t)dt = \int_{r_k}^{R} \sigma(t)dt = \sum_{i=k+1}^{K} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma(t)dt\,. \tag{2.50}$$

Следовательно,

$$\tau(r_k,\pi) = \sum_{i=k+1}^{K} \frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2}\Delta r_{i-1} \tag{2.51}$$

Рассмотрим теперь случай $\theta \geq \pi/2$. Так же, как и ранее, перепишем (1.87) в виде:

$$\tau(r_k,\theta) = \int_0^{r_k\cos\theta + \sqrt{R^2 - r_k^2\sin^2\theta}} \sigma(\sqrt{r_k^2 - 2r_k t\cos\theta + t^2})dt = \sum_{i=1}^{K-k} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sigma(\sqrt{r_k^2 - 2r_k t\cos\theta + t^2})dt \tag{2.52}$$

где

$$s_i = r_k\cos\theta + \sqrt{r_{k+i}^2 - r_k^2\sin^2\theta}\,, \text{ i=0,1,…,K-k} \tag{2.53}$$

Каждой из слагаемых интегралов вычислим приближенно по квадратурной формуле Гаусса с двумя узлами. При этом подынтегральная функция рассчитывается по интерполяционной формуле:

$$\sigma(r) = \frac{r - r_{k+i-1}}{\Delta r_k}\sigma_{k+i} + \frac{r_{k+i} - r}{\Delta r_{k+i-1}}\sigma_{k+i-1}\,. \tag{2.54}$$

Если же $\theta < \pi/2$, то вводим в рассмотрение натуральное m так, чтобы $r_{m-1} \leq r_k\sin\theta < r_m$.
Пусть далее:

$$s_i = \begin{cases} r_k\cos\theta - \sqrt{r_{k-i}^2 - r_k^2\sin^2\theta}, i = 0,1,...,k-m, \\ r_k\cos\theta - \sqrt{r_{i-k+2m-1}^2 - r_k^2\sin^2\theta}, i = k-m+1,...,K+k-2m+1. \end{cases} \tag{2.55}$$

Интеграл (2.47) представляется в виде суммы:

$$\tau(r_k,\theta) = \sum_{i=1}^{K+k-2m+1} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sigma(\sqrt{r_k^2 - 2r_k t\cos\theta + t^2})dt\,. \tag{2.56}$$

Каждый из слагаемых интегралов вычисляется по квадратурной формуле. Подынтегральная функция — по формулам линейной интерполяции:

$$\sigma(r)=\begin{cases}\dfrac{r-r_{k-i}}{\Delta r_{k-i}}\sigma_{k-i+1}+\dfrac{r_{k-i+1}-r}{\Delta r_{k-i}}\sigma_{k-i}, i=1,2,...,k-m,\\ \dfrac{r-r_{j-1}}{\Delta r_{j-1}}\sigma_j+\dfrac{r_j-r}{\Delta r_{j-1}}\sigma_{j-1}, j=k-m+1,...,K+k-2m+1,\end{cases} \quad (2.57)$$

где j=i-k+2m-1, $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$.

Формулы (2.54) и (2.56) повторяет аналогичные формулы, приведенные выше. Таким образом, нам нет нужды обращаться к процедуре счета $\tau(r,\theta)$, а также – к процедурам счета $\sigma(r)$. Так как расчет $\tau(r,\theta)$ нам больше нигде не требуются, его целесообразно включить в процедуру счета функции $F^{(1)}(r,\psi;\theta,\alpha)$, определенной формулой (2.45).

2.3. РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛА РАССЕЯНИЯ

Рассчитываемый интеграл имеет вид:

$$f(r,\psi;\theta,\alpha)=\sigma_s(r)\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}g(r,\mu_1)v(r,\psi;\theta',\alpha')d\alpha', \quad (2.58)$$

где, по-прежнему:

$$\mu_1=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\alpha-\alpha'), \quad (2.59)$$

$g(r,\mu)$ — заданная функция (индикатриса рассеяния), нормированная согласно условию:

$$2\pi\int_{-1}^{+1}g(r,\mu)d\mu=1; \quad (2.60)$$

$v(r,\psi;\theta,\alpha)$ считается найденной на предшествующих этапах вычислений.

Зависимость функции $v(r,\psi;\theta,\alpha)$ от азимутальной переменной α будем аппроксимировать конечным тригонометрическим многочленом:

$$v(r,\psi;\theta,\alpha)=\frac{1}{2}v_0(r,\psi,\theta)+\sum_{n=1}^{N}v_n(r,\psi,\theta)\cos n\alpha \quad (2.61)$$

Мы не останавливаемся здесь на вычислении функций $v_n(r,\psi,\theta)$. Разложение функции в тригонометрический ряд достаточно хорошо известно и мы будем исходить из того, что функции $v_n(r,\psi,\theta)$ известны нам.

Подставим аппроксимацию (2.61) во внутренний интеграл, стоящий в правой части (2.58). Тогда, полагая $\mu=\cos\theta$, $\mu'=\cos\theta'$,

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}g(r,\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\alpha-\alpha'))v(r,\psi;\theta',\alpha')d\alpha'=\\&=\int_0^{2\pi}g(r,\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\alpha-\alpha'))[\frac{1}{2}v_0(r,\psi,\theta')+\sum_{n=1}^{N}v_n(r,\psi,\theta')\cos n\alpha']d\alpha'\end{aligned} \quad (2.62)$$

Следовательно:

$$\int_0^{2\pi} g(r,\mu_1)v(r,\psi;\theta',\alpha')d\alpha' = \frac{1}{2}\gamma_0(r,\mu,\mu')v_0(r,\psi,\theta') + \sum_{n=1}^{N}\gamma_n(r,\mu,\mu')v_n(r,\psi,\theta')\cos n\alpha\,, \quad (2.63)$$

где

$$\gamma_n(r,\mu,\mu') = \int_0^{2\pi} g(r,\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos\beta)\cos n\beta d\beta \quad (2.64)$$

Подставляя выражение (2.64) в формулу (2.58), найдем:

$$f(r,\psi;\theta,\alpha) = \sigma_s\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'[\frac{1}{2}\gamma_0(r,\mu,\mu')v_0(r,\psi,\theta') + \sum_{n=1}^{N}\gamma_n(r,\mu,\mu')v_n(r,\psi,\theta')\cos n\alpha] \quad (2.65)$$

Вводя обозначение

$$f_n(r,\psi,\theta) = \sigma_s(r)\int_0^{\pi}\gamma_n(r,\mu,\mu')v_n(r,\psi,\theta')\sin\theta' d\theta'\,,$$

соотношению (1.105) придадим вид:

$$f(r,\psi;\theta,\alpha) = \frac{1}{2}f_0(r,\psi,\theta) + \sum_{n=1}^{N}f_n(r,\psi,\theta)\cos n\alpha \quad (2.66)$$

Нам осталось указать способ вычисления $f_n(r,\psi,\theta)$. Перепишем предварительно их в виде:

$$f_n(r,\psi,\theta) = \sigma_s(r)\int_0^{1}[\gamma_n(r,\mu,\mu')v_n(r,\psi,\theta') + \gamma_n(r,\mu,-\mu')v_n(r,\psi,\pi-\theta')]d\mu' \quad (2.67)$$

Для вычисления последних интегралов воспользуемся формулой средних прямоугольников. Пусть

$$\mu_m = m/M\,,\; m = 0,1,...,M\,. \quad (2.68)$$

Тогда приближенно будем иметь:

$$f_n(r,\psi,\theta') = \frac{\sigma_s}{M}\sum_{m=1}^{M}[\gamma_n(r,\mu,\mu_{m-\frac{1}{2}})v_n(r,\psi,\theta'_{m-\frac{1}{2}}) + \gamma_n(r,\mu,-\mu_{m-\frac{1}{2}})v_n(r,\psi,\pi-\theta'_{m-\frac{1}{2}})], \quad (2.69)$$

где

$$\begin{cases}\mu_{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mu_m + \mu_{m-1})\\ \theta_{m-\frac{1}{2}} = \arccos\mu_{m-\frac{1}{2}}\end{cases} \quad (2.70)$$

Описанная выше процедура не требует знания значений функции $f(r,\psi;\theta,\alpha)$ при r, отличных от узлов r_k заранее выбранной сетки по переменной r. Что же касается зависимости $f(r,\psi;\theta,\alpha)$ от двух других параметров ψ и θ, то для ее аппроксимации поступим следующим образом.

Интервалы изменения переменных $p=\cos\psi$ и $\mu=\cos\theta$ разделим соответственно на I и J равных частей и построим двумерную сетку с узлами (p_i,μ_j) , $i=0,1,...,I;\ j=0,1,...,J$, где:

$$\begin{cases} p_i=-1+2i/I, i=0,1,...,I \\ \mu_j=-1+2j/J, j=0,1,...,J. \end{cases} \tag{2.71}$$

Затем в каждом узле $r=r_k$ пространственной переменной r рассчитаем таблицу функций $f_n(r_k,\psi_i,\mu_j)$, где $\psi_i=\arccos p_i$, $\theta_j=\arccos\mu_j$, и запомним эту таблицы. Для вычисления значений $f(r_k,\psi_s;\theta_s,\alpha_s)$ сначала составляем сумму:

$$f(r,\psi;\theta,\alpha)=\frac{1}{2}f_0(r,\psi,\theta)+\sum_{n=1}^{N}f_n(r,\psi,\theta)\cos n\alpha \tag{2.72}$$

в четырех узлах (p_i,μ_i), (p_{i+1},μ_j), (p_i,μ_{j+1}) и (p_{j+1},μ_{j+1}), подобрав значения i и j так, чтобы точка (p,μ) лежала бы в прямоугольнике

$$\{p_i\le p\le p_{i+1},\mu_j\le\mu\le\mu_{j+1}\} \tag{2.73}$$

После этого значение $f(r,\psi;\theta,\alpha)$ вычисляется по формуле линейной интерполяции:

$$f(r,\psi,\theta,\alpha)=\frac{\mu-\mu_j}{\Delta\mu}[\frac{p-p_j}{\Delta p}f(r,\psi_{i+1};\theta_{j+1},\alpha)+\frac{p_{i+1}-p}{\Delta p}f(r,\psi_i;\theta_{j+1},\alpha)]+$$
$$+\frac{\mu_{j+1}-\mu}{\Delta\mu}[\frac{p-p_i}{\Delta p}f(r,\psi_{i+1};\theta_j,\alpha)+\frac{p_{i+1}-p}{\Delta p}f(r,\psi_i;\theta_j,\alpha)],\ \Delta p=\frac{2}{I},\ \Delta\mu=\frac{2}{J}\ . \tag{2.74}$$

Имея в виду особенности поведения функции $f(r,\psi;\theta,\alpha)$, целесообразно строить упомянутую выше двумерную сетку так, что точка с координатами $p=0$ и $\mu=0$ оказались бы среди ее узлов. Для этого значения I и J следует выбирать четными.

Как следует из сказанного выше, нам необходимо иметь значения функций $f(r,\psi,\theta)$ в узлах ψ_i и θ_j (значения r, как уже указывалось, совпадают с узлами r_k, $k=1,0,...K$). Полагая в (2.69) $\psi=\psi_i$ и $\theta=\theta_j$, найдем:

$$f_n(r,\psi_i,\theta_j)=\frac{1}{M}\sigma_s(r)\sum_{m=1}^{M}[\gamma_n(r,\mu_j,\mu_{m-\frac{1}{2}})v_n(r,\psi_i;\theta'_{m-\frac{1}{2}})+$$
$$+\gamma_n(r,\mu_j,-\mu_{m-\frac{1}{2}})v_n(r,\psi_i,\pi-\theta'_{m-\frac{1}{2}})] \tag{2.75}$$

Заметим, что $\mu_j=-\mu_{J-j}$. Из определения интегралов $\gamma_n(r,\mu,\mu')$ следует:

$$\gamma_n(r,\mu,-\mu')=\gamma_n(r,-\mu,\mu'), \tag{2.76}$$

Поэтому, если воспользоваться обозначением

$$\omega_{jm}^{nk}=\gamma_n(r_k,\mu_j,\mu_{m-\frac{1}{2}})\ , \tag{2.77}$$

то формуле (1.115) при $r = r_k$ можно придать вид:

$$f_n(r_k,\psi_i,\theta_j) = \frac{\sigma_s}{M}\sum_{m=1}^{M}[\omega_{jm}^{nk} v_n(r_k,\psi_i,\theta'_{m-\frac{1}{2}}) + \omega_{J-j,m}^{nk} v_n(r_k,\psi_i,\pi-\theta'_{m-\frac{1}{2}})]\,; \qquad (2.78)$$

в последней формуле принято во внимание соотношение (2.76).

Таким образом, для реализации формулы (2.78) требуется запомнить одну прямоугольную матрицу ω_{jm}^{nk} с $(J+1)*M$ элементами для каждой фиксированной пары значений n и k.

Вернемся к определению (2.64) , положим в нем $n = 0$ и проинтегрируем его по μ в пределах от -1 до +1. Тогда будем иметь:

$$\int_{-1}^{+1}\gamma_0(r,\mu,\mu')d\mu' = \int_{-1}^{+1}d\mu'\int_{0}^{2\pi}g(r,\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos\alpha')d\alpha' = 2\pi\int_{-1}^{+1}g(r,\mu)d\mu = 1 \qquad (2.79)$$

в соответствии с условием нормировки (2.60). Следовательно, при любом μ должно выполняться приближенное равенство:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}[\gamma_0(r,\mu,\mu_{m-\frac{1}{2}}) + \gamma_0(r,\mu,-\mu_{m-\frac{1}{2}})] = \eta \approx 1 \qquad (2.80)$$

или, используя обозначения (2.77):

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\omega_{jm}^{0k} + \omega_{J-j,m}^{0k}) = \eta_{jk} \approx 1 \qquad (2.81)$$

Если $\eta \neq 1$ существенно, то целесообразно заменить все ω_{jm}^{nk} новыми значениями по формуле

$$\tilde{\omega}_{jm}^{nk} / \eta_{ik} \qquad (2.82)$$

Тогда условия нормировки (2.60) для модифицированной матрицы $\left\|\tilde{\omega}_{jm}^{nk}\right\|$ будет выполняться точно:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\omega_{jm}^{0k} + \omega_{J-j,m}^{0k}) = \eta_{jk} = 1 \qquad (2.83)$$

На этом закончим рассмотрение основных принципов и алгоритмов решения уравнения переноса излучения для гетерофазных сферических сред.

Последняя третья часть статьи будет посвящена тестированию и верификации модели переноса солнечного излучения

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований,
грант №18-05-00812.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николайшвили Ш. С., Перадзе Р. К., Гонгадзе Ю. А., Гварамадзе М. Г., Канкия М. К. Построение модели свечения рассеивающего искусственного образования в условиях верхней атмосферы // Министерство народного образования Грузинской ССР, Научно- исследовательский институт прикладной математики им. академика Векуа Тбилисского государственного Университета. Отчет о научно-исследовательской работе (заключительный), № Гос.регистрации 01860003053, Тбилиси, 1990.
2. Беликов Ю. Е., Николайшвили Ш. С. и Перадзе Р. К. Модель рассеяния солнечного света на искусственном сферическом газодисперсном облаке в верхней атмосфере Земли // Космические исследования. – М.: Наука, 1993, Т.-31, вып.1, с.135—142.
3. Belikov Yu. E., Romanovsky Yu. A., Nikolaishvili Sh. S., Peradze R. Numerical model of scattering radiation in the earth atmosphere for scientific Investigations and applications // Phys. Chem. Earth (B), 2000, No. 5—6, pp.427—430.
4. Belikov Yu. E., Nikolaishvili Sh. S., Romanovsky Yu. A. A model of scattered radiation field in the Earth // Abstracts of The International Radiation Symposium IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation. Saint- Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, July 24—29, 2000, pp.76—77.
5. Belikov Yu. E., Gurvich A. V., Nicolaishvily S. Sh., Nicolaishvily Sh. S., Romanovsky Yu. A. Propagation of the solar radiation in the optical thick irregular medium // SPIE Proceedings,1995, v.2580, pp.115—126.
6. Belikov Yu. E., Gurvich A. V. Images of optically thick artificial aerosol clouds in the near-Earth Space // Adv. Space Res., 1995, v.15, N12, pp.103—106.
7. Беликов Ю. Е., Гурвич А. В., Николайшвили Ш. С. Цветовая диагностика искусственных облаков в околоземном космическом пространстве // Космические исследования. – М.: Наука, 1993.- Т.31, N 1.- с.108—114.
8. Belikov Yu. E. Modelling of the twilight sky brightness using a numerical solution of the radiation transfer equation. // J. of Atmospheric and Terrestrial Physics, 1996, vol.58, No.16, pp.1843—1848.
9. Belikov Yu. E. Dependence of Solar Radiation in the Polar Stratosphere on the Distribution of Ozone and Stratospheric Aerosol // J. Physics and Chemistry of the Earth, part B, 2000, v.25, No. 5-6,pp. 423—426.
10. Belikov Yu. E., Moeseyenko K. B. Influence of solar radiation attenuation by aerosol on the ozone content in the polar stratosphere // Proceedings of the Quadrennial Ozone Symposium, Hokkaido University, Sapporo, Japan 3-8 July 2000, p. 213—214.
11. Беликов Ю. Е. Оптические модели сферических гетерофазных сред в прикладной геофизике: Дис. доктора физ.-мат. наук: 25.00.29. — Защищена 16.05.2007; утв. 12.10.2007; 005272. – М., 2007. – 209 с.
12. Petropavlovskikh I., DeLuisi J., Herman B., Loughman, Bartia, P. K., Mateer, C. L., Lenoble, J., and Belikov Yu. E. A comparison of radiance calculations by spherical atmosphere radiation transfer codes for modelling the Umkehr effect // Proc. of the XVIII Quadrennial Ozone Symposium, L'Aquila, Italy.- 1996.- p.163—166.
13. Postylyakov O. V., Masleev A. N., Antyufeev V. S., Ukhinov S. A., Belikov Yu. E., Nikolaishvili Sh. S., Gogohia V. V. A comparison of radiation transfer algorithms for modelling of the zenith sky radiance observations used for determination of stratospheric trace gases and aerosol // Abstracts of The International Radiation Symposium IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation. Saint-Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, July 24—29, 2000, pp.189—190.
14. Postylyakov O. V., Belikov Yu. E., Nikolaishvili Sh. S., Rozanov A. A comparison of radiation transfer algorithms for modelling of the zenith sky radiance observations used for determination of stratospheric trace gases and aerosol // IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation, W. L. Smith and Yu. M. Timofeyev (Eds.). A. Deepak Publishing, Hampton, Virginia, 2001, pp.885—888.
15. Дышлевский С. В., Беликов Ю. Е. Особенности вариаций потоков излучения в водородной линии Лайман-альфа в D-области ионосферы, Международный симпозиум «Атмосферная радиация и динамика» (МСАРД-2017), 27—30 июня 2017 г., С.Петербург-Петродворец, тезисы доклада, с.257—259, http://www.rrc.phys.spbu.ru/msard17/thesis.pdf
16. Mie G A contribution to the optics of turbid media, especially colloidal metallic suspensions // Annal. Phys., 1908, vol. 25, N 4, p.377—445.
17. Мак-Картни Э. Оптика атмосферы. – М.: Мир, 1979. – 421 с.
18. Зуев В. Е., Креков Г. М. Оптические модели атмосферы. - Л.:Гидрометеоиздат, 1986. – 256 с.

MATHEMATICAL MODEL OF THE RADIATION TRANSFER IN THE SPHERICAL HETEROPHASE MEDIUM. PART 2

Belikov Yu. E., Dyshlevsky S. V., Nikolaishvili Sh. S.

The consideration of the radiation transfer model in the spherical heterophase medium is continued (see the beginning in [1]). The basic algorithms for the radiation transfer equation solution: integration of the transfer equation along the fixed ray, the calculation of the first-order scattering radiation field, and the calculation of the integral of scattering on the whole are presented.

KEYWORDS: MATHEMATICAL MODELING, RADIATION TRANSFER, SCATTERED RADIATION FIELD IN THE EARTH ATMOSPHERE