ГЕЛИОГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫПУСК 17, 33 –63, 2018

ТЕХНОЛОГИИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

ISSN 2304-7380

Поступила в редакцию 12.03.2018 г.

УДК 519.63

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОЙ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ В ИОНОСФЕРЕ

В.И. Агошков[1], Е.И. Пармузин[2], Г.А. Балыбердин[3]

Формулируется класс обратных задач в теории ионосферы и исследуется метод их решения, на основе вариационной ассимиляции данных наблюдений за полным электронным содержанием (ПЭС).

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИОНОСФЕРЫ, МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА, ВАРИАЦИОННАЯ АССИМИЛЯЦИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы получения данных наблюдений и измерений в ионосфере являются одними из самых актуальных в навигационных системах, работе систем ГЛОНАС и GPS, спутниковых систем, систем связи и др. В настоящее время разработаны различные методы получения этих данных (см. [1-3]).

Данные наблюдений за состоянием ионосферы могут использоваться для восстановления приближенного уровня содержания электронов и ионов в ионосфере, и здесь уже предложено ряд подходов (см. [1-3]). В работе [2] предлагается рассматривать данные о ПЭС как систему интегральных уравнений 1-го рода и решать ее известными методами теории некорректно поставленных задач. В [3] рассматривается ансамблевый алгоритм ассимиляции данных наблюдений на основе теории фильтров Калмана.

В настоящей работе изучается наиболее точный и обоснованный метод ассимиляции данных за ПЭС в ионосфере под названием «вариационный метод ассимиляции» для решения класса обратных задач о восстановлении (подправки) ряда параметров математической модели об изменении концентрации электронов. Мы формулируем этот класс обратных задач, исследуем вопросы их однозначной и плотной разрешимости, а также предлагаем алгоритмы решения. В качестве метода построения всего процесса изучения рассматриваемых проблем применяется известный «метод малого параметра» и методология из [4].

ОБОЗНАЧЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $x \equiv \lambda \in [0,2\pi]$, $y \equiv \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ есть угловые переменные геодезической системы координат (ось $(0,x)$ направлена на Восток, $(0,y)$ направлена на Север), а z отсчитывается от Общеземного эллипсоида по нормали к нему. Ось $(0,z)$ направлена вверх, при этом $z \in [h_0, h_1]$ ($h_0 = 90$ км, $h_1 = 500$ км). Систему координат $(\lambda, \vartheta, z) \equiv (x, y, z) \equiv \vec{x}$ будем называть «стандартной системой координат» (приближенной сферической системой), и она часто используется в геофизической гидродинамике. Считаем, что вектор $\vec{x} \in D \subset R^3$ принадлежит сферическому слою $D = \Omega \times (h_0, h_1)$, где Ω – сфера радиуса R с мерой $d\Omega = \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\lambda$, а меру в D определим как $dD = R^2 \, d\Omega \, dz$. Здесь R — средний радиус Земли. Нижнюю границу D будем обозначать через Γ_0

[1] **Агошков Валерий Иванович, гл.н.с., ИВМ РАН, (495)9848120(3776), e-mail: agoshkov@inm.ras.ru**

[2] **Пармузин Евгений Иванович, с.н.с., ИВМ РАН, (495)9848120(3759), e-mail: parm@inm.ras.ru**

[3] **Балыбердин Григорий Алексеевич, студ., МГУ им. М.В. Ломоносова, (495)9848120(3759), e-mail: balyberdin_grigoriy@mail.ru**

(или кратко $z = h_0$), а верхнюю — через Γ_1 (или $z = h_1$). Вектор внешней нормали $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ к $\Gamma \equiv \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, в случае сферического слоя есть $\vec{n} = (0,0,1)$ на Γ_1 и $\vec{n} = (0,0,-1)$ на Γ_0.

Пусть $\Phi(\vec{x}, t)$, где $t \in [0, \bar{t}]$ $(\bar{t} < \infty)$, $\vec{x} \in \bar{D} = D \cup \Gamma$, есть концентрация электронов в точке $\vec{x} \in \bar{D}$ в момент времени $t \in [0, \bar{t}]$. Одномерное уравнение для Φ вида [1], [5] имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_a \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(U\Phi) + K\Phi = F, \tag{1}$$

где:

$$U \equiv w - D_a\left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right) \equiv w - U_1;$$

w — суммарная скорость вертикального переноса электронов за счет ветрового увлечения и электромагнитного дрейфа; функции D_a, H, K, P, T_p положительны, нелинейным гладким образом зависят от $I_0 \equiv I_0(t)$ — параметра уровня активности солнечного излучения.
Функции D_a, H, K, T_p также параметрически зависят от λ, ϑ, t и явным образом от z, тогда как зависимость функции P от всех переменных t, λ, ϑ, z является явной. Таким образом: $\Phi \equiv \Phi(\vec{x}, t) \equiv \Phi(\lambda, \vartheta, z, t)$.

Сформулируем краевые условия для Φ. Начальное условие — «обычное»:

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_{(0)}(\bar{x}) \quad \text{в } D \tag{2}$$

Пусть далее $\vec{U} \equiv (0,0,U)$ и

$$U_n = \vec{U} \cdot \vec{n}, \qquad U_n^{(+)} = \frac{|U_n| + U_n}{2}, \qquad U_n^{(-)} = \frac{|U_n| - U_n}{2}.$$

Легко заметить, что в нашем случае:

$$U_n^{(+)} = \left.\frac{|U| + U}{2}\right|_{z=h_0}, \qquad U_n^{(-)} = \left.\frac{|U| - U}{2}\right|_{z=h_1},$$

а $U_n^{(-)}$ — входящие по нормали в D скорости.
Граничные условия принимаются следующие:

$$D_a \frac{\partial \Phi}{\partial n} + U_n^{(-)}\Phi = Q \quad \text{на } \Gamma, \tag{3}$$

где $Q \equiv Q_0$ при $z = h_0$ (т. е. на $\Gamma_0 \times \Omega \times (0, \bar{t})$ — входящий поток на Γ_0), $Q \equiv Q_1$ при $z = h_1$ (т. е. на $\Gamma_1 \times \Omega \times (0, \bar{t})$ – входящий поток на Γ_1).

Согласно [5] можно принять:

$$Q = Q_0 \equiv F_0 \cdot \Phi \quad \text{при } z = h_0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}), \tag{4}$$

$$Q = Q_1 \equiv F_1 \cdot \Phi \quad \text{при } z = h_1 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}) \tag{5}$$

с некоторыми коэффициентами F_0, F_1, определенными на $\Omega \times (0, \bar{t})$. Кроме того, следуя [5], [6] в первом приближении:

$$F_0 = 0, \quad F_b \cong 0 \tag{6}$$

Если $Q|_{z=h_0} \equiv Q_0 = 0$, то Q на Γ_1 может выступать «дополнительным неизвестным» («управление», «второстепенное управление»). Но можно положить $Q \equiv F_1\Phi|_{z=h_1}$ и считать F_1 — дополнительным неизвестным (управлением). Итак, далее рассматриваем для Φ граничное условие вида

$$\left(D_a \frac{\partial \Phi}{\partial n} + U_n^{(-)}\Phi\right)|_\Gamma = Q|_\Gamma \quad \text{в } \Omega \times (0, \bar{t}), \tag{7}$$

где $\Gamma \equiv \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; $Q \equiv Q_0 = 0$ на Γ_0; $Q \equiv Q_1$ на Γ_1; $Q_1 \cong 0$ (в первом приближении), но в общем случае Q неизвестная функция.

Уравнение (1) будем записывать также в форме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L\Phi = P \quad \text{в } D \times (0, \bar{t}) \tag{8}$$

где

$$P = P(I_0; \vec{x}, t),\ I_0 = I_0^{(st)} + V_0(t),\ I_0^{(st)} = 80;$$

$V_0(t)$ — дополнительное неизвестное («основное управление»);

$$L\Phi \equiv L(I_0; \vec{x}, t);$$

$$L\Phi \equiv -\frac{\partial}{\partial z}\left(D_a \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial (U\Phi)}{\partial z} + K\Phi;$$

$$D_a = D_a(I_0; \vec{x}, t), \dots, K = K(I_0; \vec{x}, t)$$

Отметим, что формально можно считать, что в L включены и операторы горизонтальных диффузий и переноса, но с нулевым коэффициентом горизонтальной диффузии и нулевыми горизонтальными скоростями. Граничные условия (7) в этом случае остаются корректными.

ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последующем рассматриваются только вещественные функции и функциональные пространства. Введем следующие гильбертовы пространства функций:

$$L_2(D) \equiv L_2(\Omega \times (h_0, h_1)) \colon (\Phi, \widehat{\Phi}) \equiv (\Phi, \widehat{\Phi})_{L_2(D)} = \int\limits_D \Phi\, \widehat{\Phi}\, dD,$$

$$||\Phi|| \equiv ||\Phi||_{L_2(D)} = (\Phi, \Phi)^{1/2} < \infty,$$

$$X\colon\ ||\Phi||_X = (||\frac{\partial \Phi}{\partial z}||^2 + ||\Phi||^2)^{1/2} = (\Phi, \Phi)_X^{1/2} < \infty, \quad (\Phi, \widehat{\Phi})_X = (\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z}) + (\Phi, \widehat{\Phi});$$

$$Y \equiv L_2(0, \bar{t}; \bar{X})\colon \quad ||\Phi||_Y = (\int\limits_0^{\bar{t}} ||\Phi||_X^2(t)\, dt)^{1/2} < \infty, \quad Y^* \equiv L_2(0, \bar{t}; X^*),$$

$$W\colon \quad ||\Phi||_W = (||\frac{\partial \Phi}{\partial t}||_{Y^*}^2 + ||\Phi||_Y^2)^{1/2} < \infty,$$

$$W_1 \equiv \{\Phi \in W\colon\ \Phi|_{t=\bar{t}} = 0\},\ W_0 \equiv \{\Phi \in W\colon\ \Phi|_{t=t_0=0}\},$$

$$\widetilde{W}_2 \equiv \{\Phi \in W\colon\ (\Phi, 1) = 0 \quad \forall t \in (0, \bar{t}) <=> (\Phi \perp 1) \quad \forall t \in (0, \bar{t})\},$$

$$W_2 \equiv \{\Phi \in W\colon \int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \ dz = 0 \text{ п. в. на } \Omega \times (0, \bar{t})\}.$$

Отмечаем, что $W_2 \subset \widetilde{W_2}$.

Введем следующую обобщенную постановку задачи для (1): найти $\Phi \in W$, т. ч.

$$\begin{cases} (\Phi,\widehat{\Phi})|_{t=\bar{t}} + \int\limits_0^{\bar{t}} (-\Phi,\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial t})\,dt + \int\limits_0^{\bar{t}} a\,(\Phi,\widehat{\Phi})(t)\,dt = \\ = \int\limits_0^{\bar{t}} (P,\widehat{\Phi})\,dt + \int\limits_0^{\bar{t}} (Q,\widehat{\Phi})_{L_2(\Gamma_1\times\Omega)}\,dt + (\Phi_{(0)},\widehat{\Phi})|_{t=0} \qquad \forall\,\widehat{\Phi}\in W\,, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$(Q,\widehat{\Phi})_{L_2(\Gamma_1\times\Omega)} \equiv \int\limits_{\Omega} Q\,\widehat{\Phi}|_{\Gamma_1}\,d\Omega \equiv \int\limits_{\Omega} Q\,\widehat{\Phi}|_{(z=h_1)\cup(z=h_0)}\,d\Omega$$

$$a(\Phi,\widehat{\Phi}) \equiv (D_a\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}) - (U\Phi,\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}) + (K\Phi,\widehat{\Phi}) + \int\limits_{\Gamma\times\Omega} U_n^{(+)}\,\Phi\widehat{\Phi}\,d\Gamma d\Omega$$

$$\int\limits_{\Gamma\times\Omega} U_n^{(+)}\,\Phi\widehat{\Phi}\,d\Gamma d\Omega \equiv \int\limits_{\Omega} U_n^{(+)}\,\Phi\widehat{\Phi}|_{\Gamma_0\cup\Gamma_1}\,d\Omega \equiv \int\limits_{\Omega} (\,U_n^{(+)}\Phi\widehat{\Phi}|_{z=h_0} + U_n^{(+)}\Phi\widehat{\Phi}|_{z=h_1})\,d\Omega$$

Считаем, что $\widehat{\Phi}$ — гладкая функция из W по $\lambda\equiv x$, $\vartheta\equiv y$, а все коэффициенты и решение Φ в (9) считаем непрерывными по λ,ϑ (как увидим далее, это предположение позволит «действовать» на Φ трехмерными δ-функциями).

Замечание. Представляя $\widehat{\Phi}$ как $\widehat{\Phi}\equiv\widehat{\Phi}_1(z,t)\cdot\Phi_2(\lambda,\vartheta)$, где $\widehat{\Phi}_1\in L_2(0,\bar{t};W_2^1(h_0,h_1))$, а $\Phi_2(\lambda,\vartheta)$ есть гладкая функция по λ,ϑ, можно снять в (9) интегрирование по (λ,ϑ) и перейти к обобщенной постановке задачи, когда в (9) можно считать $(\cdot,\cdot)\equiv(\cdot,\cdot)_{L_2(h_0,h_1)}$, а все коэффициенты и Φ будут зависящими от λ,ϑ как от параметров, либо как от независимых переменных (как, например, для функции P). Но пока будем использовать (9), т. к. здесь нам удобнее будет работать с 3-мерными δ-функциями.

Обратим внимание, что на самом деле в (9) допускается случай, когда $\Phi\in Y$, однако, мы ищем Φ в классе W. Последнее ограничение позволяет во втором слагаемом в левой части (9) осуществить интегрирование по-частям и получить следующую (эквивалентную (9)) обобщенную постановку задачи: найти $\Phi\in W$, т. ч.

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t},\widehat{\Phi}\right)dt + \int\limits_0^{\bar{t}} a\left(\Phi,\widehat{\Phi}\right)(t)\,dt = \\ = \int\limits_0^{\bar{t}} (P,\widehat{\Phi})\,dt + \int\limits_0^{\bar{t}} (Q,\widehat{\Phi})_{L_2(\Gamma_1\times\Omega)}\,dt \quad \forall\widehat{\Phi}\in W, \\ \Phi|_{t=0} = \Phi_{(0)} \quad \text{в } L_2(D). \end{cases} \tag{10}$$

В соотношении (10) теперь уже можно требовать $\forall\,\widehat{\Phi}\in Y$, но поскольку W плотно в Y, оставим требование $\forall\,\widehat{\Phi}\in W$.

Задача (9) является задачей со всеми естественными краевыми условиями (как граничными, так и начальным). Поэтому в ней, вообще говоря, при отыскании обобщенного решения Φ можно не требовать, чтобы Φ удовлетворяло краевым условиям. При рассмотрении (10) уже надо удовлетворять начальному условию $\Phi|_{t=0}=\Phi_{(0)}$ в D.

Далее задачу (9) будем рассматривать при дополнительном условии вида:

$$\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi\,dz = \phi_{obs}(t,\lambda,\vartheta) \quad \text{на } \Omega\times(0,\bar{t}), \tag{11}$$

где $\phi_{obs}\in L_2((0,\bar{t})\times\Omega)$ – заданная функция.

Другие дополнительные условия для Φ будем вводить ниже, в зависимости от типа и числа дополнительных неизвестных (помимо $V_0(t)$).

При дополнительном условии вида (11) предполагается, что функция $\phi_{obs}(t,\lambda,\vartheta)$ задана почти всюду на $\Omega\times(0,\bar{t})$ (чего зачастую нет). Более «практичным» является следующий случай дополнительных условий. Так, пусть рассматриваются J наклонных траекторий «спутник — станция» $\{S_j(t)\}_{j=1}^{J}$, где $S_j(t)$ есть j-ая траектория при $t\in(t_{j0},t_{j1})$. Считаем, что $(t_{j0},t_{j1})\in[0,\bar{t}]\ \forall j$. Характеристическую функцию интервала (t_{j0},t_{j1}) обозначим через $m_j(t)$. Траектория $S_j(t)$ пусть задается параметрическим вектором $\vec{X}_j(t)$, а в качестве параметра выбирается время t ($\forall j$). Предположим, что вдоль каждой траектории $\vec{X}_j(t)$ задано полное электронное содержание (ПЭС), задаваемое функцией $\phi_{obs,j}$, которая не зависит от t и параметрически зависит от λ, ϑ:

$$\int\limits_{S_j}\Phi\ dS=\phi_{obs,j}\,,\quad j=1,2,\dots,J. \tag{12}$$

Поскольку в качестве параметра выбрано время, то

$$dS=\left|\frac{d\vec{X}_j}{dt}\right|dt\,,\quad t\in(t_{j0},t_{j1})$$

и в качестве наблюдаемых величин принимаются:

$$\int\limits_{S_j}\Phi\ dS=\int\limits_{t_{j0}}^{t_{j1}}\left|\frac{d\vec{X}_j}{dt}\right|\Phi(\vec{X}_j(t),t)\,dt,\quad j=1,2,\dots J. \tag{13}$$

— интегральные содержания концентрации электронов вдоль траекторий.

Продлим траектории $\{\vec{X}_j(t)\}$ на $(0,\bar{t})\setminus(t_{j0},t_{j1})$, например, постоянными так, чтобы $\{\tilde{\vec{X}}_j\}$ – продолжения $\{\tilde{\vec{X}}_j(t)\}$ оставались непрерывными и принадлежали D (хотя и с возможными изломами). Тогда для наблюдений будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_{S_j}\Phi\ dS=\int\limits_{\tilde{S}_j}m_j\,(t)\vec{\Phi}\left(\tilde{\vec{X}}_j(t),t\right)\,dS=\\=\int\limits_{0}^{\bar{t}}m_j\,(t)\cdot\vec{\Phi}(\tilde{\vec{X}}_j(t),t)\cdot\sigma_j(t)\,dt=\phi_{obs,j}\,,\quad j=1,2\dots J,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\sigma_j(t)=\left|\frac{d\vec{X}_j}{dt}\right|$$

Дополнительные условия вида (14) зависят от положения приемников (станций), траекторий спутников, они могут быть получены раз в минуту и глобально со всего мира (см. [5]). Эти условия вероятно можно считать наиболее точными при решении обратных задач и задач ассимиляции данных в ионосфере. Однако можно предположить, что использование этих условий приводит в свою очередь к наиболее сложным постановкам задач и алгоритмам их решения (здесь достаточно вспомнить, что расчет наклонных траекторий в ионосфере представляет собой сложную проблему).

Условия (14) можно переписать в следующей форме. Вводя $\delta(\vec{x}-\vec{X}_j(t))$ (3-мерная δ-функция), представим в (14), что функции $\{\sigma_j(t)\}$ зависят от t и от координат $(\lambda_0,\vartheta_0,z_0)$, $(\lambda_1,\vartheta_1,z_1)$, начала и конца j-ой траектории (своих для каждой траектории):

$$\int_0^{\bar{t}} m_j(t)\sigma_j(t)\,dt \cdot \int_D \Phi(\bar{x},t)\delta\left(\vec{x}-\vec{X}_j(t)\right)\,dD = \phi_{obs,j}\,, \qquad j = 1,2,\dots,J \tag{15}$$

или

$$C_j\Phi = \phi_{obs,j}\,, \quad j = 1,2,\dots,J, \tag{16}$$

где

$$C_j\Phi \equiv \int_0^{\bar{t}} m_j(t)\sigma_j(t)\,dt \cdot \int_D \Phi(\vec{x},t)\delta(\vec{x}-\vec{X}_j(t))\,dD \tag{17}$$

— J дополнительных условий (условий замыкания) с операторами наблюдения $\{C_j\}$.

Пусть теперь все траектории измерения ПЭС являются вертикальными и имеется $J\times M$ наблюдений следующего вида (– $J\times M$ условий точного управления):

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi(x_j,y_j,z,t_m)\,dz = \Phi_{obs,j,m}, \quad j = 1,2,\dots J,\ m = 1,2\dots M, \tag{18}$$

где $(x_j,y_j)\in\Omega\ \forall j,\ t_m\in[0,\bar{t}\,]\ \forall m, \{(x_j,y_j)\}$ – сетка $\sim$ «5×2.5 град» по долготе и широте, а $t_m - t_{m-1}\sim 1$ час $\forall m$ (см. [5]).

Если ввести δ-функции $\{\delta(x-x_j)\}$, $\{\delta(y-y_j)\}$, $\{\delta(t-t_m)\}$, то условия (18) можно переписать так:

$$C_{j,m}\Phi \equiv \int_0^{\bar{t}} (\Phi,\delta(x-x_j)\delta(y-y_j))\delta(t-t_m)\,dt = \Phi_{obs,j,m}, \qquad j = 1,2,\dots J,\ m = 1,2,\dots,M, \tag{19}$$

где $\{C_{j,m}\}$ — операторы наблюдения.

Каждый тип из приведенных выше дополнительных условий может рассматриваться при изучении задачи (10). Однако в настоящей работе основное внимание мы будем уделять случаю дополнительного условия вида (11).

ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Пусть в дальнейшем:

$$D_0 \equiv D_a|_{I_0=I_0^{st}}\,,\dots,P_0 = P|_{I_0=I_0^{st}}\,,$$

где $I_0^{st} = 80$, а также:

$$a_0(\Phi,\widehat{\Phi})(t) \equiv \left(D_0\frac{\partial\Phi}{\partial z},\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}\right)(t) - \left(U_0\Phi,\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}\right)(t) + (K_0\Phi,\widehat{\Phi})(t) + ((U_0)_n^{(+)}\Phi,\widehat{\Phi})_{L_2(ga\times\Gamma)}.$$

Предположим, что в (9):

$$I_0(t) = I_0^{(st)} + \varepsilon V_0(t),$$

$$P = P_0 + \varepsilon V_p(z,t),$$

где ε — малый параметр, введенный здесь формально (и его затем можно принять 1), $V_0(t)$ – некоторая функция, которая в последствии будет дополнительным неизвестным в рассматриваемых нами обратных задачах (или — управление уровнем активности излучения), а $V_p(z,t)$ — поправка в

$P = P(t, \vec{x})$, которая также будет выступать в качестве дополнительного неизвестного в обратных задачах.

Пусть для определенности $V_0(t) \in L_2(0, \bar{t})$, а $V_p(z, t)$ представим в виде:

$$V_p(z,t) = \sum_{k=1}^{K} d_k\, m_k(z) \chi_k(t), \tag{20}$$

где K — число слоев ионосферы в слое (h_0, h_1), функция $m_k(z)$ есть характеристическая функция k-го слоя, а $\chi_k(t)$ — кусочно-постоянная по t функция, каждая для «своего слоя», которая выбирается так, чтобы приближенно учесть проявление активности ионизации в k-м слое (например, днем: $\chi_k(t) = 1$, тогда как ночью: $\chi_k(t) = 0$ и т. п., $k = 1,2, \dots, K$).

Коэффициенты $\{d_k\}$ есть постоянные (или, даже $d_k = d_k(\lambda, \vartheta) \in L_2(\Omega)$ и в этом случае: $V_p = V_p(z, t, \lambda, \vartheta)$). Пусть далее рассматривается случай, когда $d_k = const\ \forall\, k$.

Далее, поскольку $D_a, \dots, K$ зависят от I_0, то будем далее для формы $a(\cdot,\cdot)$ также писать $a(I_0; \Phi, \widehat{\Phi})$, подчеркивая ее зависимость от I_0.

Предположим, что задача (9) рассматривается при дополнительном условии (11), о котором будем говорить «условие в форме точного управления». В слабом смысле это условие может быть записано как:

$$\inf_{V_0, V_p} \int_0^{\bar{t}} d\,t \int_\Omega |\int_{h_0}^{h_1} \Phi\ dz - \phi_{obs}(t, \lambda, \vartheta)|^2\, d\Omega. \tag{21}$$

Будем искать Φ методом малого параметра:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \cdots, \tag{22}$$

где $(\Phi_0 \equiv \Phi|_{\varepsilon=0}) \in W$ есть решение задачи вида:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{st}; \Phi_0, \widehat{\Phi})(t) = (P_0, \widehat{\Phi})(t) + \\ + \displaystyle\int_\Omega \int_\Gamma Q\, \widehat{\Phi}\, d\Gamma\, d\Omega \quad \forall \widehat{\Phi} \in W, \\ \Phi|_{t=0} = \Phi_{(0)}. \end{cases} \tag{23}$$

Пусть

$$\Phi_{obs}^{(0)} \equiv \int_{h_0}^{h_1} \Phi_0\ dz,$$

$$\Phi_{obs}^{(1)} \equiv \Phi_{obs}(t, \lambda, \vartheta) - \Phi_{obs}^{(0)}$$

и вместо (11) вводится условие с ε вида:

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi\ dz = \Phi_{obs}^{(0)} + \varepsilon \Phi_{obs}^{(1)},$$

которое при $\varepsilon = 1$ совпадает с (11).

Если Φ ищется в форме (22), то при $\varepsilon = 0$ условие с ε выполняется тождественно, тогда как для Φ_1 должно выполняться следующее ограничение:

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \, dz = \Phi_{obs}^{(1)}(t,\lambda,\vartheta) \quad \text{на } \Omega \times (0,\bar{t})$$

— условие точного управления для Φ_1. Помимо этого ограниченная функция Φ_1 должна быть решением некоторой задачи. Чтобы найти вид задачи для Φ_1 продифференцируем (9) по ε, полагая затем $\varepsilon = 0$. После этих операций приходим к задаче вида: найти $\Phi_1 \in W$, т. ч.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{(st)}; \Phi_1, \widehat{\Phi})(t) = (V_p, \widehat{\Phi})(t) + B_0(\Phi_0, \widehat{\Phi})(t) \cdot V_0(t) \quad \forall \widehat{\Phi} \in W, \\ &\Phi_1|_{t=0} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

при этом все граничные условия для Φ_1 будут *естественными*, а также:

$$\begin{aligned} &B_0(\Phi_0, \widehat{\Phi})(t) = (P_0^{(I)}, \widehat{\Phi})(t) - a_0^{(I)}(\Phi_0, \widehat{\Phi})(t), \\ &a_0^{(I)}(\Phi_0, \widehat{\Phi}) \equiv \frac{\partial a}{\partial \varepsilon}(I_0; \Phi_0, \widehat{\Phi})|_{\varepsilon=0} = \int_D \left(D_0^{(I)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z} - \Phi_0 U_0^{(I)} \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z} + K_0^{(I)} \Phi_0 \widehat{\Phi} \right) dD \; + \\ &+ \int_\Omega \int_\Gamma (U_0^{(I)})_n^{(+)} \Phi_0 \widehat{\Phi} \, d\Omega \, d\Gamma. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что Q не зависит от Φ, иначе появляется еще один «граничный интеграл» с Φ_1 в силу дифференцирования Q по ε)

$$\begin{gathered} \frac{\partial D_a}{\partial \varepsilon}_{\varepsilon=0} = \frac{\partial D_a}{\partial I_0} \frac{\partial I_0}{\partial \varepsilon}_{\varepsilon=0} \equiv D_0^{(I)}(I_0^{st}) \cdot V_0(t), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial K}{\partial \varepsilon}_{\varepsilon=0} = \frac{\partial K}{\partial I_0} \frac{\partial I_0}{\partial \varepsilon}_{\varepsilon=0} \equiv K_0^{(I)}(I_0^{st}) \cdot V_0(t). \end{gathered}$$

Отметим, что задачу (24) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{st}; \Phi_1, \widehat{\Phi})(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} d_k \, \lambda_k(t)(m_k(z), \widehat{\Phi})(t) \; + B_0(\Phi_0, \widehat{\Phi}) V_0(t) \\ \Phi_1|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где формы $a_0(\cdot;\cdot,\cdot)$, $B_0(\cdot,\cdot)$ определены ранее, а Φ_1 может быть подчинена приведенному выше ограничению.

Дополнительными неизвестными являются $\{d_k\}_{k=1}^K$, $V_0(t)$ и необходимо вводить $(K+1)$ дополнительных условий (уравнений замыкания). Если считать, что $\Phi_1 \in W$, тогда и $\widehat{\Phi} \in W$, а ограничение на Φ_1 (см. ранее) рассматривать как одно из дополнительных условий, то надо вводить еще K «уравнений замыкания».

Если найдены Φ_0, Φ_1 при заданных $V_0(t)$, $V_p(z,t)$ и, например, ε мало, то

$$\Phi = \Phi^{(1)} + O(\varepsilon^2), \tag{26}$$

где

$$\Phi^{(1)} \equiv \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1$$

или

$$\Phi \cong \Phi^{(1)} \text{ в } D \times (0,\bar{t}) \tag{27}$$

— приближение «1-го порядка к Φ». На основании (27) возможен следующий алгоритм исследования чувствительности Φ к вариациям I_0:

- полагается $V_p \equiv 0$;
- находится Φ_0 (т. е. при $I_0 \equiv I_0^{(st)}$);
- вводится набор «вариаций» $\{V_{0,k}(t)\}_{k=1}^{K}$;
- находятся решения $\{\Phi_{1,k}\}$, соответствующие $\{V_{0,k}\}$;
- полагая $\varepsilon \equiv 1$ анализируем величины $\{\Phi_{1,k}\}$, приближенно характеризующие основную часть вариации Φ_0 (конечно, при условии, что Φ_k, $k = 2,3,\ldots$ малы, а ряд (22) сходится). Заметим, что можно находить вариации решений и при $V_p \not\equiv 0$.

Обратимся теперь к (11). Принимая (22), имеем

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi_0\, dz + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int_{h_0}^{h_1} \Phi_k\, dz = \phi_{obs}^{(0)}(t,\lambda,\vartheta) + \varepsilon \phi_{obs}^{(1)}. \tag{28}$$

Считая $\phi_{obs}(t,\lambda,\vartheta)$ независящим от ε, из (28) получаем

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi_0\, dz \equiv \phi_{obs}^{(0)}(t,\lambda,\vartheta) \quad \text{на } \Omega \times (0,\bar{t}), \tag{29}$$

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1\, dz = \phi_{obs}^{(1)}(t,\lambda,\vartheta) \quad \text{на } \Omega \times (0,\bar{t}), \tag{30}$$

$$\Phi_k \in W_2 \quad \text{при } k = 2,3\ldots, \tag{31}$$

а также

$$(\Phi_k, 1)_{L_2(D)} = 0, \quad k = 2,3\ldots \quad \text{на } (0,\bar{t}). \tag{32}$$

Таким образом, если мы хотим исследовать какую-либо обратную задачу для (1), (2) при дополнительном условии (11), то эту задачу можно приближенно решать, рассматривая обратную задачу для (23) при условии (29), а изучая эту задачу для (24), отыскивая Φ_1 при условии

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1\, dz = \phi_{obs}^{(1)}(t,\lambda,\vartheta) \quad \text{на } \Omega \times (0,\bar{t}), \tag{33}$$

тогда как Φ_0 должно быть решением (23) при условии:

$$\bar{\Phi}_0 \equiv \frac{1}{h_1 - h_0}\left(\int_{h_0}^{h_1} \Phi_0\, dz\right) = \bar{\phi}_{obs}^{(0)} \equiv \frac{\bar{\phi}_{obs}^{(0)}(t,\lambda,\vartheta)}{(h_1 - h_0)} \quad \text{на } \Omega \times (0,\bar{t}). \tag{34}$$

Отмечаем, что можно требовать $\Phi_1 \in W$, заменяя (33) – условие точного уравнения, его слабой формулировкой, следующей из (21):

$$\inf_{V_0,V_p} \int_0^{\bar{t}} d\,t \int_{\Omega} |\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1\, dz - \phi_{obs}^{(1)}|^2\, d\Omega$$

(что мы и сделаем ниже).

Рассмотрим возможный алгоритм нахождения Φ_0. Будем искать Φ_0 в виде:

$$\Phi_0 = \bar{\Phi}_0 + \Phi', \tag{35}$$

где Φ' — поправка к $\bar{\Phi}_0$ (– аномалия). Подставляя (25) в (14) имеем при $\bar{\Phi}_0 = \bar{\phi}_{obs}$ (согласно требованию (24)):

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi'}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{st}; \Phi', \widehat{\Phi})(t) = \bar{f}_1(\widehat{\Phi})(t) \quad \forall \widehat{\Phi} \in W, \\ \Phi'|_{t=0} = (\Phi_{(0)} - \bar{\Phi}_0) \equiv \Phi'_{(0)} = \Phi_{(0)} - \bar{\phi}_{obs}^{(0)}, \end{cases} \tag{36}$$

где

$$\bar{f}_1(\widehat{\Phi})(t) = (P_0, \widehat{\Phi})(t) - \left(\frac{\partial \bar{\phi}_{obs}^{(0)}}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) - a_0(I_0^{(st)}; \bar{\phi}_{obs}^{(0)}, \widehat{\Phi})(t) + \int_\Omega \int_\Gamma Q\, \widehat{\Phi}\, d\Gamma\, d\Omega, \tag{37}$$

$$a_0(I_0^{(st)}; \bar{\phi}_{obs}^{(0)}, \widehat{\Phi})(t) = \left(D_0 \frac{\partial \bar{\phi}_{obs}^{(0)}}{\partial z}, \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z}\right) - \left(U_0 \bar{\phi}_{obs}^{(0)}, \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z}\right)(t) + (K_0 \bar{\phi}_{obs}^{(0)}, \widehat{\Phi})(t) + \int_\Omega \int_\Gamma (U_0)_n^{(+)} \bar{\phi}_{obs}^{(0)} \widehat{\Phi}\, d\Gamma\, d\Omega, \tag{38}$$

где $\partial \bar{\phi}_{obs}^{(0)}/\partial z = 0$. Видим, что (36) есть обычная прямая задача (при заданных Q). Решая ее, получим Φ' и $\Phi_0 = \bar{\Phi}_0 + \Phi' = \bar{\phi}_{obs}^{(0)}(t) + \Phi'$. Отметим также, что поскольку структура $\bar{\Phi}_{(0)}$ неизвестна, то $\bar{\Phi}_{(0)}{}'$ (а значит и Φ'), вообще говоря, не принадлежит W_2.

Рассмотрим теперь задачу (24): найти $\Phi_1 \in W$, т. ч.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{st}; \Phi_1, \widehat{\Phi})(t) = (V_p, \widehat{\Phi})(t) + B_0(\Phi_0, \widehat{\Phi})(t) \cdot V_0(t) \quad \forall \widehat{\Phi} \in W, \\ \Phi_1|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Задача (39) рассматривается при условии

$$\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1\, dz = \phi_{obs}^{(1)} \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}), \tag{40}$$

т. е. Φ_1 *ищется в пространстве функций* W *и при условии (40) — которое запишем в слабой форме в «функционале стоимости»* J_α *(который мы определим ниже); это позволит затем, например, брать* $\widehat{\Phi} \equiv \widehat{\Phi}(t)$.

Замечание 1. Пусть $\Phi_1 \in W$ (т. е. рассматривается (39), (40)) и $\widehat{\Phi} \equiv \widehat{\Phi}(t)$ — произвольная гладкая по t функция. Тогда (39) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \widehat{\Phi}(t)\right) + \left(\int_D K_0 \cdot \Phi_0\, dD\right) \cdot \widehat{\Phi}(t) + \left(\int_\Omega \int_\Gamma (U_0)_n^{(+)} \Phi_0\, d\Omega\, d\Gamma\right) \cdot \widehat{\Phi}(t) = \\ = \left(\int_D V_p\, dD\right) \cdot \widehat{\Phi}(t) + \left[\int_D P_0^{(I)}\, dD - \int_D K_0^{(I)} \Phi_0\, dD - \int_\Omega \int_\Gamma (U_0^{(I)})_n^{(+)} \Phi_0\, d\Gamma\, d\Omega\right] \widehat{\Phi}(t) \cdot V \tag{41}$$

Принимая во внимание (40) и сокращая обе части (41) на $\widehat{\Phi}(t)$, получим простое уравнение для $V_0(t)$ (при заданном V_p):

$$A(t) \cdot V_0(t) = B(t)\,, \quad t \in (0, \bar{t}), \tag{42}$$

где

$$\begin{cases} A(t) \equiv \int\limits_D K_0^{(I)}\, \Phi_0\, dD + \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma (\,U_0^{(I)})_n^{(+)} \Phi_0\, d\Gamma\, d\Omega - \int\limits_D P_0^{(I)}\; dD, \\ B(t) \equiv \dfrac{\partial \phi_{obs}^{(1)}}{\partial t} + \left(\int\limits_D V_p\; dD\right) - \left(\int\limits_D K_0 \cdot \Phi_0\, dD\right) - \left(\int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma (\,U_0^{(I)})_n^{(+)} \Phi_0\, d\Gamma\, d\Omega\right), \end{cases} \tag{43}$$

из которого (при очевидных предположениях) можно определить $V_0(t)$.

При рассмотрении дополнительных условий вида (16) методом малого параметра получаем следующую систему ограничений на $\Phi_0, \Phi_1, \dots$:

$$C_j \Phi_0 = \phi_{obs,j},\ C_j \Phi_k = 0,\ j = 1,2, \dots, J,\ k \geq 1, \tag{44}$$

а при условии (18) имеем:

$$C_{j,m} \Phi_0 = \phi_{obs,j,m},\ C_{j,m} \Phi_k = 0,\ j = 1,2, \dots, J,\ m = 1,2, \dots, M,\ k \geq 1. \tag{45}$$

Нетрудно заметить, что в отличие от условия (11) реализация условий (15), (18) и ограничений (44), (45) может быть связана со значительными алгоритмическими и вычислительными трудностями. Поэтому при рассмотрении (15), (18) мы переформулируем алгоритм приближенного решения рассматриваемых задач методом малого параметра.

Пусть Φ_0 есть решение задачи (23) и рассматриваются условия (16):

$$C_j \Phi = \phi_{obs,j}, \quad j = 1,2, \dots, J \tag{46}$$

Полагаем:

$$\phi_{obs,j}^{(0)} \equiv C_j \Phi_0, \quad j = 1,2, \dots, J, \tag{47}$$

и перейдем от (16) к условиям наблюдения с малым параметром ε:

$$C_j \Phi = \phi_{obs,j}^{(0)} + \varepsilon \cdot \phi_{obs,j}^{(1)}, \tag{48}$$

где

$$\phi_{obs,j}^{(1)} \equiv \phi_{obs,j} - \phi_{obs,j}^{(0)}, \quad j = 1,2, \dots, J$$

Таким образом, мы здесь вводим малый параметр и в условия наблюдения, что, например, можно считать оправданным в случае, если $\phi_{obs,j}^{(0)}$ является «хорошим» приближением $\phi_{obs,j}$ $\forall\, j$. Отметим также, что при $\varepsilon = 1$ условия (48), (46) совпадают. Теперь ставится задача: *найти* Φ, $I_0(t)$, V_p, *такие, что* $\Phi \in W$ *есть решение задачи* (*см.* (10)):

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\bar{t}} \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t)\, dt + \int\limits_0^{\bar{t}} a\,(\Phi, \widehat{\Phi})(t)\, dt = \\ = \int\limits_0^{\bar{t}} (\,P_0 + \varepsilon V_p, \widehat{\Phi})(t)\, dt + \int\limits_0^{\bar{t}} (\,Q, \widehat{\Phi})_{L_2(\Gamma_1 \times \Omega)}(t)\, dt \quad \forall\, \widehat{\Phi} \in W, \\ \Phi|_{t=0} = \Phi_{(0)} \end{cases} \tag{49}$$

и выполнены условия (48). Решение данной задачи будем искать методом малого параметра:

$$\begin{aligned}
&\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \cdots \\
&I_0 = I_0^{(st)} + \varepsilon V_0(t) + \varepsilon^2 V_1(t) + \cdots \\
&V_p = V_{p,0} + \varepsilon V_{p,1} + \varepsilon^2 V_{p,2} + \cdots
\end{aligned} \tag{50}$$

где (для упрощения обозначений) функция $V_{p,0}$ есть:

$$V_{p,0}(z,t) = \sum_{k=1}^{K} d_k\, m_k(z)\chi_k(t) \tag{51}$$

(сравнить с (20)). Принимая $\varepsilon = 0$, получаем для Φ_0 задачу (14), а условия (44) для Φ_0 выполнены тождественно:

$$C_j\Phi_0 \equiv \phi_{obs,j}^{(0)}, \quad j = 1,2,\ldots,J.$$

Теперь, дифференцируя (48), (49) по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем задачу для Φ_1 (см. (15)): *найти* $\Phi_1 \in W$*,* $V_0(t)$*,* $V_{p,0}$*, т. ч.*

$$\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{(st)}; \Phi_1, \widehat{\Phi})(t) = (V_{p,0}, \widehat{\Phi})(t) \ + \\
+B_0(\Phi_0, \widehat{\Phi})(t) \cdot V_0(t) \quad \forall\, \widehat{\Phi} \in W, \\
\Phi_1 = 0 \text{ при } t = 0,
\end{cases} \tag{52}$$

$$C_j\Phi_1 = \phi_{obs,j}^{(1)}, \quad j = 1,2,\ldots,J. \tag{53}$$

Если мы решим задачу для Φ_0 и задачу (52), (53), то с точностью до $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ получим Φ, $\mathrm{I}_0(\mathrm{t})$, P:

$$\begin{cases}
\Phi \cong \Phi^{(1)} \equiv \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1, \\
I_0(t) \cong I_0^{(1)} \equiv I_0^{(st)} + \varepsilon V_0(t), \\
P \cong P^{(1)} \equiv P_0 + \varepsilon V_{p,0}.
\end{cases} \tag{54}$$

Таким образом, мы модифицировали постановку задач так, что отыскание Φ_0 осуществляется подходящими алгоритмами решения «прямых задач», а решение (52), (53) может быть сделано алгоритмами вариационной ассимиляции данных.

Рассмотрение задач при дополнительных условиях (19) осуществляется аналогично тому, как это сделано для условий (16).

Пусть Φ_0 есть решение задачи (14). Полагаем:

$$\phi_{obs,j,m}^{(0)} \equiv C_{j,m}\Phi_0,$$

$$\phi_{obs,j,m}^{(1)} \equiv \phi_{obs,j,m} - \phi_{obs,j,m}^{(0)}, \quad j = 1,2,\ldots,J,\ m = 1,2,\ldots,M,$$

и переходим к условиям наблюдения с параметром ε:

$$C_{j,m}\Phi = \phi_{obs,j,m}^{(0)} + \varepsilon\phi_{obs,j,m}^{(1)} \quad \forall\, j,m. \tag{55}$$

Ставится задача: *найти* Φ*,* $I_0(t)$*,* V_p*, такие, что* $\Phi \in W$ *есть решение задачи (49) и выполнены условия (55).*

Решение данной задачи ищется в виде (50), где Φ_0 есть решение (14), при этом:

$$C_{j,m}\Phi_0 \equiv \phi_{obs,j,m}^{(0)} \quad \forall\, j,m,$$

тогда как $\Phi_1 \in W$ удовлетворяет системе уравнений (52) и условиям вида:

$$C_{j,m}\Phi_1 = \phi^{(1)}_{obs,j,m}, \quad j = 1,2,\dots,J,\ m = 1,2,\dots,M. \tag{56}$$

Отыскивая Φ_0, Φ_1, получаем с точностью $O(\varepsilon^2)$ функции Φ, $I_0(t)$, P согласно (54).

ПОСТАНОВКА КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В рассматриваемом в данной работе классе обратных задач дополнительным неизвестным (– управлением) являются $V_0(t)$ и $V_p(z,t)$, т. е. $V_0(t)$ и фактически набор постоянных $\{d_k\}_{k=1}^{K}$ определяющих $V_p(z,t)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Phi_1 \in W$, $\widehat{\Phi} \in W$ и накладывается ограничение (11). Отметим, что здесь можно брать, например, $\widehat{\Phi} \equiv 1$ и рассматривать слагаемое $(\partial\Phi/\partial t, \widehat{\Phi})(t)$ из (39) в форме

$$\left(-\Phi_1, \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial t}\right)(t) + (\Phi_1, \widehat{\Phi})|_{t=\bar{t}}.$$

Теперь мы формулируем следующую обратную задачу (на самом деле это класс обратных задач): *пусть функция* Φ_0 *определена и условие* (34) *учтено при получении* (36)*; требуется определить* Φ_1, $V_0(t)$ *и* $\{d_k\}_{k=1}^{J}$ *такие, что выполняются соотношения* (39) *и условия* (40) *(– условия точного управления)*.

Ниже мы предлагаем вариационный метод решения данной обратной задачи метод вариационной ассимиляции данных наблюдений $\{\phi_{obs,j}\}$, при этом перейдем от условий вида (40) к их слабой формулировке в смысле наименьших квадратов, при этом вводя регуляризацию задачи. В последующем мы рассмотрим также некоторые частные случаи сформулированной общей обратной задачи.

Пусть теперь рассматриваются условия (15) или (18). Как следует из изложенного ранее, эти условия отличаются заданием операторов наблюдения $\{C_j\}$, $\{C_{j,m}\}$ и физическим смыслом величин $\{\phi^{(1)}_{obs,j}\}$, $\{\phi^{(1)}_{obs,j,m}\}$. Однако по форме записи задачи для Φ_1 здесь фактически совпадают. Пусть рассматриваются условия (15). Тогда постановка обратных задач формулируется так: *если* Φ_0 *определена, то требуется найти* $\Phi_1 \in W$, $V_0(t) \in L_2(0,\bar{t})$ *и* $\{d_k\}_{k=1}^{K}$, *такие, что выполнены соотношения* (52), (53).

Если же вводятся условия (18), то при найденном Φ_0 постановка обратной задачи есть: *требуется найти* $\Phi_1 \in W$, $V_0(t) \in L_2(0,\bar{t})$ *и* $\{d_k\}_{k=1}^{K}$, *такие, что выполнены уравнения* (52), (56). Отметим, что в отличие от случая рассмотрения условия (11) данные обратные задачи будут решаться только приближенно алгоритмами вариационной ассимиляции данных измерений $\{\phi^{(1)}_{obs,j}\}$ или $\{\phi^{(1)}_{obs,j,m}\}$, которые будут изложеныв следующем параграфе.

АЛГОРИТМЫ ВАРИАЦИОННОЙ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Введем следующий «функционал стоимости» (при $\Phi_1 \equiv \Phi$):

$$J_\alpha(\Phi, V) = \frac{\alpha_0}{2}\int_0^{\bar t} |V_0(t) - V_0^{(0)}(t)|^2\,dt + \sum_{k=1}^{K}\frac{\alpha_k}{2}|d_k - d_k^{(0)}|^2 + \beta_0 J_0(\Phi, V_0), \quad (57)$$

где: $V \equiv (V_0(t), d_1, d_2, \ldots, d_k)$; $V_0^{(0)}(t)$ — заданное приближение к $V_0(t)$ (возможен случай, когда $V_0^{(0)}(t) \equiv 0$), $\{d_k^{(0)}\}$ — некоторое приближение к $\{d_k\}$; α_0, $\{\alpha_k\}$ — неотрицательные постоянные (– параметры регуляризации), β_0 — положительная постоянная (– весовой коэффициент), а также:

$$J_0(\Phi, V_0) = \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{\bar t}\left[\left(\int_{h_0}^{h_1}\Phi\,dz\right)(t) - \phi_{obs}\right]^2 d\Omega\,dt. \quad (58)$$

Вычислим вариацию δJ_α:

$$\begin{aligned}\delta J_\alpha &= \alpha_0\int_0^{\bar t}(V_0 - V_0^{(0)})\delta V_0(t)\,dt + \sum_{k=1}^{K}\alpha_k\,(d_k - d_k^{(0)})\delta d_k \; + \\ &+\beta_0\cdot\int_\Omega d\,\Omega\int_0^{\bar t}\left(\int_{h_0}^{h_1}\delta\,\Phi\,dz\right)\cdot\left[\left(\int_{h_0}^{h_1}\Phi\,dz\right)(t) - \phi_{obs}\right]dt,\end{aligned} \quad (59)$$

где $\delta\Phi \in W$ — зависимая вариация, удовлетворяющая соотношению вида:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\delta\Phi}{\partial t}, \widehat\Phi\right)(t) + a_0(I_0^{(st)}; \delta\Phi, \widehat\Phi)(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\delta\,d_k\cdot\chi_k(t)(m_k(z), \widehat\Phi)(t) \; + \\ +B_0(\Phi_0, \widehat\Phi)\cdot\delta V_0(t) \quad \forall\, t \in (0, \bar t), \\ \delta\Phi|_{t=0} = 0,\end{cases} \quad (60)$$

где $\{\delta d_k\}$, $\delta V_0(t)$ — независимые вариации. Введем $q \in W$ — решение сопряженной задачи вида:

$$\begin{cases}-(\widehat\Phi, \dfrac{\partial q}{\partial t})(t) + a_0(I_0^{st}; \widehat\Phi, q)(t) = \displaystyle\int_D\widehat\Phi\left((\int_{h_0}^{h_1}\Phi\,dz)(t) - \phi_{obs}(t)\right)dD, \\ q|_{t=\bar t} = 0, \quad \forall\widehat\Phi \in W.\end{cases} \quad (61)$$

Тогда согласно (59)–(61) выражение для δJ_α можно записать так (при $\widehat\Phi \equiv q$ в (60)):

$$\begin{aligned}\delta J_\alpha &= \alpha_0\int_0^{\bar t}(V_0 - V_0^{(0)})\delta V_0(t)\,dt + \sum_{k=1}^{K}\alpha_k\,(d_k - d_k^{(0)})\delta d_k \; + \\ &+\sum_{k=1}^{K}\delta\,d_k\int_0^{\bar t}\chi_k\,(t)\cdot(m_k(z), q)(t)\,dt \; + \int_0^{\bar t}\delta\,V_0(t)\cdot B_0(\Phi_0, q)\,dt\end{aligned} \quad (62)$$

Если теперь рассматривать уравнение $\delta J_\alpha = 0$, то из (62) следует, что на «оптимальном решение» $V_0(t)$, $\{d_k\}_{k=1}^K$ (в силу произвольности $\{\delta d_k\}$, δV_0) справедливы следующие $(K+1)$ уравнений вида:

$$\begin{cases} \alpha_0(V_0(t) - V_0^{(0)}(t)) + B_0(\Phi_0, q)(t) = 0 \quad \forall t \in (0, \bar{t}), \\ \alpha_k(d_k - d_k^{(0)}) + \int\limits_0^{\bar{t}} \chi_k(t) \cdot \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} m_k(z)\, dz \cdot \int\limits_\Omega q\, d\Omega \right) dt = 0, \quad k = 1,2,\dots,K \end{cases} \tag{63}$$

Дальнейшее решение задачи «обычное» (см. [4]):

1) при заданных на m-ом шаге итерационного процесса величинах $V_0^{(m)}$, $\{d_k^{(m)}\}_{k=1}^K$ решаем задачу по определению $\Phi^{(k)} \equiv \Phi$ (определяя $\Phi_0^{(m)}$, $\Phi_1^{(m)}$);

2) при $\Phi \equiv \Phi^{(m)}$ решаем (61) и определяем $q \equiv q^{(m)}$;

3) затем находим новые приближения $V_0^{(m+1)}$, $\{d_k^{(m+1)}\}$:

$$V_0^{(m+1)} = V_0^{(n)} - \tau_n \left[\alpha_0 \left(V_0^{(m)} - V_0^{(0)} \right)(t) + B_0\left(\Phi_0, q^{(m)}\right)(t) \right], \quad \forall t \in (0, \bar{t}), \tag{64}$$

$$d_k^{(m+1)} = d_n^{(m)} - \tau_k \left[\int\limits_0^{\bar{t}} \chi_k(t) \int\limits_{h_0}^{h_1} m_k(z) \left(\int\limits_\Omega q\, d\Omega \right) dz\, dt \right], \quad k = 1,2,\dots,K,$$

при $\alpha_0 > 0$, $\alpha_k > 0$, $k = 1,\dots,K$ (при том, что они малы) процесс сходится, и где $\{\tau_k\}$ положительные параметры итерационного процесса.

Замечание 1. Подчеркнем, что наш подход фактически является методом интерполяции измерений ПЭС путем применения вариационной ассимиляции измерений ПЭС в «простейшей модели», описывающей поведение концентрации электронов в ионосфере.

Замечание 2. Если эта «простейшая модель» есть некоторый шаг схемы расщепления более сложной многомерной модели, то она должна рассматриваться на последнем шаге схемы, а сама схема должна быть обоснована.

Замечание 3. Сформулированную общую обратную задачу можно рассматривать и как задачу точного управления для Φ_1. Так, пусть Φ_0 уже определено и требуется найти Φ_1, $\{d_k\}_{k=1}^K$, $V_0(t)$, т. ч. выполняются соотношения (24) условия вида

$$\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi_1\, dz = 0 \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}) \tag{65}$$

Эту задачу точного управления можно рассматривать как и обратную задачу ионосферы, считая $\{d_k\}_{k=1}^K$, $V_0(t)$ дополнительными неизвестными, а условия (65) уравнениями замыкания. Изложенный же выше метод ассимиляции данных наблюдений является вариационным методом решения этой задачи.

Пусть теперь рассматриваются случай дополнительных условий вида (16) и задача (52), (53). Для упрощения обозначений примем $\Phi_1 \equiv \Phi$. Функционал стоимости здесь вводится так:

$$J_\alpha(\Phi, V) = \frac{\alpha_0}{2} \int\limits_0^{\bar{t}} |V_0(t) - V_0^{(0)}(t)|^2\, dt + \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{2} |d_k - d_k^{(0)}|^2 + \sum_{j=1}^J \beta_j J_j(\Phi, \phi_{obs,j}^{(1)}), \tag{66}$$

где: $V \equiv (V_0(t), d_1, d_2, \dots, d_k)$; $V_0^{(0)}(t)$ — заданное приближение к $V_0(t)$ (возможен случай, когда $V_0^{(0)}(t) \equiv 0$), $\{d_k^{(0)}\}$ — некоторое приближение к $\{d_k\}$; α_0, $\{\alpha_k\}$ — неотрицательные постоянные (– параметры регуляризации), $\{\beta_j\}$ — положительные постоянные (– весовые коэффициенты), а также:

$$J_j(\Phi,\phi_{obs,j}^{(1)}) = \frac{1}{2}\left|\int_0^{\bar{t}} m_j\,(t)\sigma_j(t)\,dt\int_D \Phi\,(\vec{x},t)\cdot\delta(\vec{x}-\tilde{\vec{X}}_j)\,dD - \phi_{obs,j}^{(1)}\right|^2. \tag{67}$$

Вычислим вариацию δJ_α:

$$\begin{aligned}\delta J_\alpha \; &= \alpha_0\int_0^{\bar{t}}(V_0 - V_0^{(0)})\delta V_0(t)\,dt + \sum_{k=1}^{K}\alpha_k\,(d_k - d_k^{(0)})\delta d_k \; + \\ &+\sum_{j=1}^{J}\beta_j\left(\int_0^{\bar{t}} m_j\,(t)\sigma_j(t)\,dt\cdot\int_D \Phi\,(\vec{x},t)\delta(\vec{x}-\vec{X}_j)\,dD - \phi_{obs,j}^{(1)}\right)\times \\ &\times\int_0^{\bar{t}}\int_D (\,m_j(t)\sigma_j(t)\delta(\vec{x}-\tilde{\vec{X}}_j(t))\cdot\delta\Phi\,dD\,dt \equiv \int_0^{\bar{t}}(\,F,\delta\Phi)\,dt,\end{aligned} \tag{68}$$

где

$$F \equiv F(\Phi) = \sum_{j=1}^{J}\beta_j\,(C_j\Phi - \Phi_{obs,j}^{(1)})\cdot m_j(t)\sigma_j(t)\delta(\vec{x}-\tilde{\vec{X}}_j(t)),$$

где $\delta\Phi \in W$ — зависимая вариация, удовлетворяющая соотношению вида:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\delta\Phi}{\partial t},\widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{(st)};\delta\Phi,\widehat{\Phi})(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\delta\,d_k\cdot\chi_k(t)(m_k(z),\widehat{\Phi})(t) \; + \\ +B_0(\Phi_0,\widehat{\Phi})\cdot\delta V_0(t), \quad t\in(0,\bar{t}), \quad \forall\widehat{\Phi}\in W, \\ \delta\Phi|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{69}$$

где $\{\delta d_k\}$, $\delta V_0(t)$ — независимые вариации. Введем $q \in W$ — решение сопряженной задачи вида:

$$\begin{cases} -(\widehat{\Phi},\dfrac{\partial q}{\partial t})(t) + a_0(I_0^{st};\widehat{\Phi},q)(t) = \displaystyle\int_0^{\bar{t}}(\,F,\widehat{\Phi})\,dt, \\ q|_{t=\bar{t}} = 0, \quad \forall\widehat{\Phi}\in W. \end{cases} \tag{70}$$

Тогда согласно (68)–(70) выражение для δJ_α можно записать так (при $\widehat{\Phi}\equiv q$ в (69)):

$$\begin{aligned}\delta J_\alpha &= \alpha_0\int_0^{\bar{t}}(\,V_0 - V_0^{(0)})\delta V_0(t)\,dt + \sum_{k=1}^{K}\alpha_k\,(d_k - d_k^{(0)})\delta d_k \; + \\ &+\sum_{k=1}^{K}\delta\,d_k\int_0^{\bar{t}}\chi_k\,(t)\cdot(m_k(z),q)(t)\,dt \; + \int_0^{\bar{t}}\delta\,V_0(t)\cdot B_0(\Phi_0,q)\,dt.\end{aligned} \tag{71}$$

Если теперь рассматривать уравнение $\delta J_\alpha = 0$, то из (71) следует, что на оптимальном решение $V_0(t)$, $\{d_k\}_{k=1}^{K}$ (в силу произвольности $\{\delta d_k\}$, δV_0) справедливы следующие $(K+1)$ уравнений вида:

$$\begin{cases} \alpha_0(V_0(t) - V_0^{(0)}(t)) + B_0(\Phi_0,q)(t) = 0 \quad \forall t\in(0,\bar{t}), \\ \alpha_k(d_k - d_k^{(0)}) + \displaystyle\int_0^{\bar{t}}\chi_k\,(t)\cdot\left(\int_{h_0}^{h_1} m_k\,(z)\,dz\cdot\int_\Omega q\;d\Omega\right)dt = 0\,, \quad k = 1,2,\dots,K. \end{cases} \tag{72}$$

Дальнейшее решение задачи:

1) при заданных на -ом шаге итерационного процесса величинах $V_0^{(m)}$, $\{d_k^{(m)}\}_{k=1}^K$ решаем задачи, вычисляя $\Phi_0^{(m)}$, $\Phi_1^{(m)}$;

2) при $\Phi \equiv \Phi^{(m)}$ решаем (70) и определяем $q \equiv q^{(m)}$;

3) затем находим новые приближения $V_0^{(m+1)}$, $\{d_k^{(m+1)}\}$:

$$V_0^{(m+1)} = V_0^{(n)} - \tau_n \left[\alpha_0 (V_0^{(m)} - V_0^{(0)})(t) + \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Gamma} B_0 \, (\Phi_0, q^{(m)})(t) \right] d\Gamma \, d\Omega, \quad \forall t \in (0, \bar{t}),$$

$$d_k^{(m+1)} = d_n^{(m)} - \tau_k \left[\int\limits_0^{\bar{t}} \chi_k \, (t) \int\limits_{h_0}^{h_1} m_k \, (z) \left(\int\limits_{\Omega} q^{(m)} \, d\Omega \right) dz \, dt \right], \quad k = 1,2, \dots, K,$$

при $\alpha_0 > 0$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, K$ процесс сходится, и где $\{\tau_k\}$ положительные параметры итерационного процесса.

Рассмотрим случай дополнительных условий (18). Функционал стоимости здесь имеет вид:

$$\begin{aligned} J_\alpha(\Phi, \vec{V}) = \frac{\alpha_0}{2} \int\limits_0^{\bar{t}} | V_0(t) - V_0^{(0)}(t)|^2 \, dt + \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha_k}{2} |d_k - d_k^{(0)}|^2 \\ + \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} \beta_{j,m} J_{j,m}(\Phi, \phi_{obs,j,m}^{(1)}), \end{aligned} \tag{74}$$

где $\{\beta_{j,m}\}$ – положительные весовые коэффициенты, $\Phi \equiv \Phi_1$, а $J_{j,m}$ имеет вид:

$$J_{j,m}(\Phi, \phi_{obs,j,m}^{(1)}) = \frac{1}{2} (C_{j,m}\Phi - \phi_{obs,j,m}^{(1)})^2,$$

где

$$C_{j,m} = \int\limits_0^{\bar{t}} (\Phi, \delta(x - x_j) \delta(y - y_j)) \delta(t - t_m) \, dt \quad \forall \, (j, m)$$

Вариация δJ_α здесь есть:

$$\delta J_\alpha = \alpha_0 \int\limits_0^{\bar{t}} (V_0 - V_0^{(0)}) \delta V_0(t) \, dt + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \, (d_k - d_k^{(0)}) \delta d_k + \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{M} \beta_{j,m} \, (C_{j,m}\Phi - \phi_{obs,j,m}^{(1)}) \cdot C_{j,m} \delta\Phi,$$

где зависимая вариация $\delta\Phi$ по-прежнему определяется как решение задачи (69). Сопряженная задача здесь формулируется так: найти $q \in W$ т. ч.

$$\begin{cases} -\left(\widehat{\Phi}, \dfrac{\partial q}{\partial t}\right)(t) + a_0(I_0^{st}; \widehat{\Phi}, \hat{q})(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{M} \beta_{j,m} \, (C_{j,m}\Phi - \phi_{obs,j,m}^{(1)}) \delta(t - t_m) \times \\ \times \displaystyle\int\limits_D \delta \, (x - x_j) \delta(y - y_j) \widehat{\Phi} \, dD \quad \forall \, \widehat{\Phi} \in W, \\ q|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases}$$

а выражение для δJ_α с использованием q имеет вид (71). Система «условий оптимальности» задается выражением (72), а итерационный алгоритм решения задачи вариационной ассимиляции по форме совпадает с (73).

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ, I.

Пусть есть только дополнительное неизвестное $V_0(t)$, тогда как $d_k \equiv 0$, $k = 1,2,\dots,K$. Предположим также, что вводится только одно условие замыкания (для $\Phi_1 \equiv \Phi$):

$$\left(\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \; dz\right)(t) = \phi_{obs}^{(1)}(t) \quad \text{на } \Omega \times (0,\bar{t}) \tag{75}$$

Общее управление $I_0(t)$ по-прежнему имеет вид:

$$I_0 = I_0^{st} + \varepsilon \cdot V_0(t)\,. \tag{76}$$

Тогда при $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \cdots$ получаем условия для Φ_0, Φ_1:

$$\left(\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi_0 \; dz\right)(t) \equiv \phi_{obs}^{(0)}(t), \; \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \; dz\right)(t) = \phi_{obs}^{(1)} \quad \text{на } \Omega \times (0,\bar{t}) \tag{77}$$

— условия точного управления.

Задача для Φ_1 имеет вид (24) при $V_p \equiv 0$ и требовании: $\Phi_1 \in W_2$. Заменим условие точного управления его слабой формулировкой, требуя

$$\inf_{V_0} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\bar{t}} |\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \; dz - \phi_{obs}^{(1)}|^2 \, dt \, d\Omega\,. \tag{78}$$

Функционал J_α в данном частном случае примет вид (переобозначая $\Phi_1 \equiv \Phi$):

$$J_\alpha(\Phi, V_0) = \frac{\alpha_0}{2} \int\limits_0^{\bar{t}} |V_0(t) - V_0^{(0)}|^2 \, dt + \beta_0 J_0(\Phi_0, V_0)\,,$$

где уже $\Phi \in W$, условие замыкания рассматривается в слабой форме и

$$J_0(\Phi, V_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} d\,\Omega \int\limits_0^{\bar{t}} \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \; dz - \phi_{obs}^{(1)}\right)^2 dt\,.$$

Далее,

$$\delta J_\alpha = \alpha_0 \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\bar{t}} (V_0 - V_0^{(0)}) \delta V_0(t) \, dt + \beta_0 \int\limits_{\Omega} d\,\Omega \int\limits_0^{\bar{t}} d\,t \int\limits_{h_0}^{h_1} \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \; dt - \phi_{obs}^{(1)}\right) \delta\Phi \, dz\,.$$

Задача для q здесь есть: найти $q \in W$, т. ч.

$$\begin{cases} -\left(\widehat{\Phi}, \dfrac{\partial q}{\partial t}\right)(t) + a_0(I_0^{(st)}; \widehat{\Phi}, q)(t) = \displaystyle\int\limits_0^{\bar{t}} d\,t \int\limits_D \widehat{\Phi} \cdot \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \; dz - \phi_{obs}^{(1)}\right) dD \quad \forall \widehat{\Phi} \in W \\ q|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases} \tag{79}$$

а (48) есть:

$$\alpha_0(V_0 - V_0^{(0)})(t) + \beta_0 B_0(\Phi_0, q)(t) = 0 \quad \forall t \in (0, \bar{t}). \tag{80}$$

Итерационный процесс отыскания $V_0(t)$ следует из (57) (с рядом упрощений).

Рассмотрим вопрос единственности решения задачи. Пусть функция Q задана (например, в первом приближении $Q \equiv 0$, или мы ее уже вычислили, для чего надо дополнительное наблюдение за Φ при $z = h_1$ или $z = h_0$ на $\Omega \times (0, \bar{t})$).

Пусть задача для Φ_0 уже решена. Тогда однородная задача для Φ_1 есть: найти $\Phi_1 \in W$ т. ч.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \hat{\Phi}\right)(t) + a_0(I_0^{(st)}; \Phi_1, \hat{\Phi})(t) = 0 \quad \forall \hat{\Phi} \in W \\ \Phi_1|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

при этом согласно однородному „условию точного управления“: $\Phi_1 \in W_2$. Принимая $\hat{\Phi} = \Phi_1$ имеем:

$$\frac{||\Phi_1||^2(t)}{2} + \int_0^t [\left(D_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right) + \int_D \frac{\partial U_0}{\partial z} \cdot \frac{|\Phi_1|^2}{2}\, dD + \int_D K_0 \Phi_1^2\, dD +$$
$$+ \int_\Omega \int_\Gamma \frac{(U_{0n}^{(-)} + U_{0n}^{(+)})}{2} \Phi_1^2\, d\Gamma\, d\Omega] dt = 0$$

где

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z}(w - U_1)_{I_0 = I_0^{st}}.$$

Следовательно*:* если $\partial U_0/\partial z > 0$ (например, $\partial w/\partial z \geq 0$, а $\partial U_1/\partial z|_{I_0 = I_0^{st}} < 0$), то $\partial U_0/\partial z > 0$ и $\Phi_1 \equiv 0$ в $(0, \bar{t}) \times D$. Но тогда из (39)получаем:

$$B_0(\Phi_0, \hat{\Phi}) \cdot V_0 = 0 \quad t \in [0, \bar{t}],\ \forall \hat{\Phi} \in W.$$

Если принять $\hat{\Phi} \equiv \Phi_0$, то

$$[\Phi_0, \Phi_0] \cdot V_0(t) = 0 \quad \forall t,$$

где

$$[\Phi_0, \Phi_0] = \int_D \left(D_0^{(I)} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_0^{(I)}}{\partial z}\right) \frac{\Phi_0^2}{2}\right) \Phi_0^2\, d\Gamma\, d\Omega + \int_\Omega \int_\Gamma \left(\frac{(U_0^{(I)})_n^{(+)} + (U_0^{(I)})_n^{(-)}}{2}\right) \Phi_0^2\, d\Gamma\, d\Omega.$$

Очевидно, что если $[\Phi_0, \Phi_0] \not\equiv 0\ \forall t$, то $V_0(t) = 0$. Но тогда из задачи для Φ_1 следует $\Phi_1 = 0$ также, т. е. *имеет место единственность решения обратной задачи*.

Рассмотрим еще одно условие единственности решения задачи. Пусть в однородной задаче для Φ_1 полагаем $\hat{\Phi} \equiv 1$, тогда

$$B_0(\Phi_0, 1) \cdot V_0(t) = \left[\left(\left(\int_D K_0^{(I)} \Phi_0\, dt\right) + \int_\Omega \int_\Gamma (U_0^{(I)})_n^{(+)} \Phi_0\, d\Gamma\, d\Omega\right) \equiv I(t)\right] \cdot V_0(t) = 0 \quad \forall t.$$

Следовательно, *если интеграл* $I(t) \not\equiv 0\ \forall t$*, то* $V_0(t) = 0$ *(а значит и* $\Phi_1 \equiv 0$*) и решение задачи единственно*.

Теперь рассмотрим вопрос плотной разрешимости. Пусть задача для Φ_1 рассматривается при ограничении $\Phi_1 \in W$. Тогда и решение сопряженной задачи также ищется в W, т. е. $q \in W$.

Рассматриваем систему вида:

$$-\left(\widehat{\Phi},\frac{\partial q}{\partial t}\right)(t)+a_0\left(I_0^{(st)};\widehat{\Phi},q\right)(t)=\int\limits_{\Omega} d\,\Omega\left(\int\limits_{h_0}^{h_1}\widehat{\Phi}\;dz\right)w(\lambda,\vartheta)\quad\forall\widehat{\Phi}\in W_2 \tag{81}$$

$$q|_{t=\bar{t}}=0$$

$$B_0(\Phi_0,q)=0 \tag{82}$$

Отмечаем, что при $\widehat{\Phi}\in W_2$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{h_0}^{h_1}\widehat{\Phi}\;dz\right)\cdot w(\lambda,\vartheta,t)\,d\Omega\equiv 0\quad\forall w. \tag{83}$$

Принимая $\widehat{\Phi}=q$ получаем:

$$\begin{cases} -\left(q,\dfrac{\partial q}{\partial t}\right)(t)+a_0(I_0^{(st)};q,q)(t)=0\\ B_0(\Phi_0,q)=0\end{cases} \tag{84}$$

Следовательно $q=0$. Возвращаемся к (62) получаем также: $w=0$, т. е. *однородная сопряженная задача имеет тривиальное решение, а обратная задача плотно разрешима.*

Замечание. Обратим внимание на то, что мы смогли доказать единственность решения задачи при $\Phi_1\in W$, $q\in W$, и ее плотную разрешимость при $\Phi_1\in W_2$, $q\in W$.

Рассмотрим снова задачу для Φ_1: найти $\Phi_1\in W$, т. ч.

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t},\widehat{\Phi}\right)(t)+a_0(I_0^{(st)};\Phi_1,\widehat{\Phi})(t)=(V_p,\widehat{\Phi})(t)+B_0(\Phi_0,\widehat{\Phi})(t)V_0(t)\quad\forall\widehat{\Phi}\in W,\\ \Phi_1|_{t=0}=0,\end{cases} \tag{85}$$

где

$$a_0(I_0^{(st)};\Phi_1,\widehat{\Phi})=\int\limits_D\left[D_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}-\Phi_1U_0\cdot\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}+K_0\Phi_1\widehat{\Phi}\right]dD+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Gamma}(U_0)_n^{(+)}\Phi_1\widehat{\Phi}\,d\Gamma\,d\Omega,$$

$$B_0(\Phi_0,\widehat{\Phi})(t)=\int\limits_D\left[D_0^{(I)}\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}-\Phi_0U_0^{(I)}\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}+K_0^{(I)}\Phi_0\widehat{\Phi}\right]dD+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Gamma}(U_0)_n^{(+)}\Phi_0\widehat{\Phi}\,d\Gamma\,d\Omega.$$

Задача (85) рассматривается при условии

$$\int\limits_{h_0}^{h_1}\Phi_1\;dz=0\quad\text{на }\Omega\times(0,\bar{t}) \tag{86}$$

т. е. можно рассматривать при требовании $\Phi_1\in W_2$. Сокращая (43) на $\widehat{\Phi}(t)$ получаем уравнение для $V_0(t)$:

$$A(t)\cdot V_0(t)=\int\limits_D V_p\;dD-B(t)\quad\forall t \tag{87}$$

где

$$A(t) = \int\limits_D K_0^{(I)} \Phi_0 \, dD + \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma (U_0^{(I)})_n^{(+)} \Phi_0 \, d\Gamma \, d\Omega - \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma (U_0^{(I)})_n^{(-)} Q \, d\Gamma \, d\Omega$$

$$B(t) = \int\limits_D K_0 \, \Phi_0 \, dD + \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma (U_0^{(I)})_n^{(+)} \Phi_0 \, d\Gamma \, d\Omega$$

Обращаем внимание на то, что (87) получено при требовании $\widehat{\Phi} \in W$ (а не $\widehat{\Phi} \in W_2$); это позволило нам полагать $\widehat{\Phi} \equiv \widehat{\Phi}(t)$ и получить (87). Если же $\widehat{\Phi} \in W_2$, то брать $\widehat{\Phi} \equiv \widehat{\Phi}(t)$ нельзя.

Из (87) следует решение одной из обратных задач ионосферы: *если* $A(t) \neq 0 \ \forall t$ *, то дополнительное неизвестное* $V_0(t)$ *задается выражением:*

$$V_0(t) = \left(\int\limits_D V_p \, dD - B(t) \right) A(t), \quad t \in (0, \bar{t}).$$

(при заданных V_p).

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ, II

Пусть $\alpha_k \equiv 0, \ k = 1,2,\ldots,K$, а управлением (дополнительным неизвестным) является функция $V_0 \equiv V_0(t, \lambda, \vartheta) \in L_2((0, \bar{t}) \times \Omega)$, тогда как общее управление I_0 имеет вид:

$$I_0 = I_0^{st} + \epsilon V_0(t, \lambda, \vartheta).$$

Однако, мы будем предполагать, что все коэффициенты задачи: $D_a, \ldots, K$ не зависят от $V_0(t, \lambda, \vartheta)$, кроме функции P:

$$P = P(x, t, I_0^{st} + \epsilon V_0(t, \lambda, \vartheta)).$$

Пусть, например, они определены при

$$I_0 = I_0^{st}: \quad D_0 \equiv D|_{I_0 = I_0^{st}}, \ldots, K_0 \equiv K|_{I_0 = I_0^{st}},$$

и при всех $(\bar{x}, t) \in D \times (0, \bar{t})$. За P_0 мы здесь примем:

$$P_0 \equiv P(\bar{x}, t, I_0^{st} + \epsilon V_0(t, \lambda, \vartheta))|_{\epsilon = 0, z - z_0} \equiv P(\lambda, \vartheta, z_0, t, I_0^{st}).$$

Задача для Φ имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int\limits_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \widehat{\Phi} \right)(t) \, dt + \int\limits_0^{\bar{t}} a\,(\Phi, \widehat{\Phi})(t) \, dt = \\ & = \int\limits_0^{\bar{t}} (\, P(\vec{x}, t, I_0^{st} + \epsilon V_0(t, \lambda, \vartheta)), \widehat{\Phi})(t) \, dt + \int\limits_0^{\bar{t}} (\, Q, \widehat{\Phi})_{L_2(\Gamma_1 \times \Omega)}(t) \, dt \quad \forall \widehat{\Phi} \in W \\ & \Phi|_{t=0} = \Phi_{(0)} \quad \text{в } L_2(D) \end{aligned} \right. \tag{88}$$

и вводится условие:

$$\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \, dz = \phi_{obs}(t, \lambda, \vartheta) \text{ на } (0, \bar{t}) \times \Omega, \tag{89}$$

где $\phi_{obs}(t, \lambda, \vartheta) \in L_2((0, \bar{t}) \times \Omega)$. Пусть Φ_0 есть решения задачи (23). При $\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \cdots$ получаем условия точного управления для Φ_0, Φ_1:

$$\left(\int_{h_0}^{h_1} \Phi_0 \; dz\right)(\lambda,\vartheta,t) \equiv \phi_{obs}^{(0)} \text{ на } \Omega \times (0,\bar{t}), \tag{90}$$

$$\left(\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \; dz\right)(\lambda,\vartheta,t) \equiv \phi_{obs}^{(1)} \text{ на } \Omega \times (0,\bar{t}), \tag{91}$$

где

$$\phi_{obs}^{(1)} \equiv \phi_{obs} - \phi_{obs}^{(0)} \text{ на } \Omega \times (0,\bar{t}),$$

а Φ_1 есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t},\widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(\Phi_1,\widehat{\Phi})(t) = (V_0,\widehat{\Phi}) \quad \forall\widehat{\Phi} \in W \\ \Phi_1|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{92}$$

со всеми естественными граничными условиями для Φ_1 и ограничением (91).

Функционал стоимости в этой задаче есть:

$$J_\alpha = \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \int_0^{\bar{t}} |\, V_0 - V_0^{(0)}|^2 \, d\Omega\, dt \; + \frac{\beta_0}{2}\int_\Omega \int_0^{\bar{t}} \left|\left(\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \; dz - \phi_{obs}^{(1)}\right)(\lambda,\vartheta,t)\right|^2 \, d\Omega\, dt, \tag{93}$$

где $\alpha_0 = const \geq 0$, $\beta_0 = const > 0$, $V_0^{(0)} \in L_2(\Omega \times (0,t))$ – заданная функция. Требуется *определить* Φ_1, V_0, *такие, что выполнены уравнения* (92) *и функционал* J_α *принимает наименьшее значение.*

Уравнение Эйлера здесь имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 = \delta J_\alpha = \alpha_0 \int_\Omega \int_0^{\bar{t}} (\, V_0 - V_0^{(0)})\delta V_0 \, d\Omega\, dt \\ + \beta_0 \int_\Omega \int_0^{\bar{t}} \left[\left(\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \; dz - \phi_{obs}^{(1)}\right) - \int_{h_0}^{h_1} \delta\, \Phi_1 \, dz\right] d\Omega\, dt, \end{aligned} \tag{94}$$

где $\delta\Phi_1$ — зависимая вариация — определяется как решение задачи:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \delta\Phi_1}{\partial t},\widehat{\Phi}\right)(t) + a_0(\delta\Phi_1,\widehat{\Phi})(t) = (\delta V_0,\widehat{\Phi}) \quad \forall\widehat{\Phi} \in W \\ \delta\Phi_1|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Вводим решение q сопряженной задачи:

$$\begin{cases} -\left(\widehat{\Phi},\dfrac{\partial q}{\partial t}\right)(t) + a_0(\widehat{\Phi},q)(t) = \beta_0\left(\left(\displaystyle\int_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \; dz - \phi_{obs}^{(1)}\right),\widehat{\Phi}\right)(t), \\ q|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases} \tag{95}$$

Тогда уравнение $\delta J_\alpha = 0$ может быть записано так:

$$0 = \alpha_0 \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\bar{t}} (V_0 - V_0^{(0)}) \delta V_0 \, d\Omega \, dt + \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\bar{t}} \delta \, V_0(\lambda, \vartheta, t) \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} q \, dz \right) d\Omega \, dt, \tag{96}$$

В силу произвольности δV_0 получаем уравнение:

$$\alpha_0 (V_0 - V_0^{(0)}) + \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} q \, dz \right) = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}). \tag{97}$$

Итерационный процесс: (1) при заданном $V_0^{(m)}$ решаем задачу (92) при $V_0 \equiv V_0^{(m)}$; определяем $\Phi_1 \equiv \Phi_1^{(m)}$; (2) решаем задачу (95) и находим $q \equiv q^{(m)}$; (3) отыскиваем новое приближение $V_0^{(m+1)}$:

$$V_0^{(m+1)} = V_0^{(m)} - \tau_m \left(\alpha_0 (V_0^{(m)} - V_0^{(0)}) + \int\limits_{h_0}^{h_1} q^m \, dz \right) \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}) \tag{98}$$

при параметрах итерационного процесса $\{\tau_m\}$.

Рассмотрим вопросы единственности решения и плотной разрешимости изучаемого случая задачи. Так, однородная задача имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \widehat{\Phi} \right)(t) + a_0(\Phi_1, \widehat{\Phi})(t) = (V_0, \widehat{\Phi}) \quad \forall \widehat{\Phi} \in W, \ \forall t, \\ \Phi_1|_{t=0} = 0, \\ \int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi_1 \, dz = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}). \end{cases}$$

Как уже отмечалось ранее, при $\partial U / \partial z > 0$ форма $a_0(\cdot,\cdot)$ неотрицательна, отсюда заключаем, что $\Phi_1 = 0$, $V_0 = 0$, т.е. *рассматриваемая задача однозначно разрешима*.

Если же рассмотреть однородную сопряженную задачу:

$$\begin{cases} -\left(\widehat{\Phi}, \dfrac{\partial q}{\partial t} \right)(t) + a_0(\widehat{\Phi}, q)(t) = \beta_0(w(\lambda, \vartheta, t), \widehat{\Phi})(t), \forall \widehat{\Phi} \in W, \ \forall t \\ q|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases}$$

и условие, вытекающее из (97) при $\alpha_0 = 0$:

$$\int\limits_{h_0}^{h_1} q \, dz = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}),$$

то как и в прямой задаче *при* $\partial U / \partial z > 0$ *получаем:* $q = 0$, $w = 0$, *т.е. рассматриваемая задача плотно разрешима.* Свойства однозначной и плотной разрешимости позволяют доказать сходимость итерационного процесса решения задача, в т.ч. при $\alpha_0 = 0$ (см. [4]).

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ, III

Пусть интервал $(0, \bar{t})$ разбит на L подинтервалов (t_{l-1}, t_l), $l = 1,2, \ldots, L$, $(t_0 = 0, t_L = \bar{t})$, а одномерная задача рассматривается в следующем виде

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a(\Phi, \widehat{\Phi})(t) = (P, \widehat{\Phi})(t) + (V, \widehat{\Phi})(t) + \\ +(Q, \widehat{\Phi})_{L_2(\Gamma_1 \times \Omega)}, \ \forall \widehat{\Phi} \in W, \ t \in (t_{l-1}, t_l), \\ \Phi|_{t=l-1} = \Phi_{l-1}, \quad l = 1,2, \dots, L, \end{cases} \tag{99}$$

где Φ_{l-1} уже определено, а $V = V(t, \lambda, \vartheta)$ поправка к P на (t_{l-1}, t_l), а также

$$a(\Phi, \widehat{\Phi}) \equiv (D_a \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z}) - (U\Phi, \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z}) + (K\Phi, \widehat{\Phi}) + \int\limits_{\Gamma \times \Omega} U_n^{(+)} \Phi \widehat{\Phi} \, d\Gamma d\Omega,$$

причем D_a, U, K определены на основе Φ, V с предыдущих шагов по t. Решаемая задача формулируется так: *найти на* (t_{l-1}, t_l) *функции* Φ, V, *такие что выполнено* (99) *и ограничение*

$$\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \, dz = \phi_{obs}(t, \lambda, \vartheta) \ \text{ на } \ (t_{l-1}, t_l) \times \Omega. \tag{100}$$

Функционал стоимости здесь есть:

$$J_\alpha = \frac{\alpha_0}{2} \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} d\,t \int\limits_{\Omega} |V(t, \lambda, \vartheta)|^2 \, d\Omega + \frac{\beta_0}{2} \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} d\,t \int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \, dz - \phi_{obs}(t, \lambda, \vartheta) \right|^2 d\Omega.$$

Тогда для вариации δJ_α имеем

$$\delta J_\alpha = \alpha_0 \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} d\,t \int\limits_{\Omega} V \, \delta V d\Omega + \beta_0 \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} d\,t \int\limits_{\Omega} \delta\, \Phi \left(\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \, dz - \phi_{obs}(t, \lambda, \vartheta) \right) d\Omega$$

где $\delta\Phi$ определяется из

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \delta \Phi}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a(\delta\Phi, \widehat{\Phi})(t) = (\delta V, \widehat{\Phi})(t) \ \forall \widehat{\Phi} \in W, \\ \delta\Phi|_{t=l-1} = 0. \end{cases}$$

Сопряженная задача здесь имеет вид:

$$\begin{cases} -\left(\widehat{\Phi}, \dfrac{\partial q}{\partial t}\right)(t) + a(\widehat{\Phi}, q)(t) = \left((\int\limits_{h_0}^{h_1} \Phi \, dz - \phi_{obs}), \widehat{\Phi} \right) \ \forall \widehat{\Phi} \in W, \quad t \in (t_{l-1}, t_l) \\ q|_{t=l} = 0. \end{cases} \tag{101}$$

Тогда:

$$0 = \delta J_\alpha = \alpha_0 \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} d\,t \int\limits_{\Omega} V \, \delta V d\Omega + \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} d\,t \int\limits_{\Omega} (\int\limits_{h_0}^{h_1} q \, dz) d\Omega,$$

а уравнения Эйлера записываются так:

$$\alpha_0 V(t,\lambda,\vartheta) + \int_{h_0}^{h_1} q\,dz = 0, \text{ на } (t_{l-1}, t_l) \times \Omega \tag{102}$$

Для рассмотрения вопроса о единственности решения (Φ, V) запишем следующую однородную задачу:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \widehat{\Phi}\right)(t) + a(\Phi, \widehat{\Phi})(t) = \int_{\Omega} V\,(\int_{h_0}^{h_1} \Phi\,dz) d\Omega \;\; \forall t \in (t_{l-1}, t_l), \\ \Phi|_{t=t_{l-1}} = 0, \qquad \int_{h_0}^{h_1} \Phi\,dz = 0. \end{cases}$$

Принимая $\widehat{\Phi} = \Phi$ заключаем:

$$\frac{\| \Phi \|^2\,(t)}{2} + a(\Phi, \widehat{\Phi})(t) = 0 \quad t \in (t_{l-1}, t_l).$$

Следовательно, если $\partial U/\partial z > 0$, то $a(\Phi, \Phi) \geq 0$ и получаем, что $\Phi = 0$ на $(t_{l-1}, t_l) \times \Omega$. Но тогда также:

$$(V, \widehat{\Phi})(t) = 0, \quad \forall \widehat{\Phi}.$$

Взяв теперь $\forall \widehat{\Phi} \in W$ заключаем, что $V = 0$. Итак, *при условии* $\partial U/\partial z \geq 0$ *имеет место единственность решения обратной задачи*. Для изучения плотной разрешимости запишем систему вида:

$$\begin{cases} -\left(\widehat{\Phi}, \frac{\partial q}{\partial t}\right)(t) + a(\widehat{\Phi}, q)(t) = \int_{\Omega} w\,(t,\lambda,\vartheta)(\int_{h_0}^{h_1} \widehat{\Phi}\,dz) d\Omega \;\; \forall \widehat{\Phi} \in W, \;\; t \in (t_{l-1}, t_l) \\ q|_{t=t_l} = 0, \qquad \int_{h_0}^{h_1} q\,dz = 0. \end{cases} \tag{103}$$

Пусть $\widehat{\Phi} = q$, т.е. $\widehat{\Phi} \in W_2 \subset W$. Тогда правая часть (103) равна нулю и снова при выполнении условия $\partial U/\partial z \geq 0$, получаем: $q = 0$ на $(t_{l-1}, t_l) \times \Omega$. Но тогда при $\forall \widehat{\Phi} \in W$ из (103) следует также, что $w(t,\lambda,\vartheta) = 0$ на $(t_{l-1}, t_l) \times \Omega$, т.е. *имеет место также и плотная разрешимость задачи*.

Итерационный процесс решения задачи может быть записан так: (1) при заданном $V^{(m)}$ на $(t_{l-1}, t_l) \times \Omega$ решаем задачу (99) при $V \equiv V^{(m)}$ и находим $\Phi \equiv \Phi^{(m)}$; (2) затем при $\Phi \equiv \Phi^{(m)}$ решаем (101) и вычисляем $q \equiv q^{(m)}$; (3) далее находим новое приближение $V^{(m+1)}$:

$$V^{(m+1)} = V^{(m)} - \tau_m(\alpha_0 V^{(m)} + \int_{h_0}^{h_1} q\,dz) \;\text{ на }\; (t_{l-1}, t_l) \times \Omega. \tag{104}$$

При *соответствующем выборе параметров* $\{\tau_m\}$ (см. [4]) *итерационной процесс сходится*.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ. ВЕРИФИКАЦИЯ ПРЯМОЙ МОДЕЛИ

Для последующей реализации вариационной ассимиляции данных в ионосфере была произведена численная верификация одномерная модель ионосферы, предложенная в [5]. Исследовано поведение решения модели в зависимости от трех параметров — времени t, параметра уровня активности солнечного излучения I_0 (вообще говоря, зависящего от t) и потока электронов F_b на верхней границе. В качестве основного уравнения модели было взято уравнение неразрывности для ионов. Область исследования была принята следующая: интервал высоты от $h_0 = 120$ км до $h_1 = 500$ км. Расчет проводился для первого дня года на сутки.

Граничные условия взяты согласно предложениям и замечаниям из [4] и с учетом уравнений из [6]:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Phi C_0^{(-)}\right)_{z=h_0} = 0\,,$$

$$\left[D_a\left(\frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Phi C_0^{(+)}\right)\right]_{z=h_1} = F_b\,,$$

где

$$C_0^{(+)} = \frac{|C_0| + C_0}{2}\,, \qquad C_0^{(-)} = \frac{|C_0| - C_0}{2}.$$

В численных экспериментах брались следующие параметры модели. Параметр уровня активности излучения $I_0 \in [70{,}220]$. Определяет ионизацию, температуру и концентрацию. Параметр верхней границы F_b меняется от -10^9 до 10^9. Ионизация:

$$P(z,\chi) = P_0 \exp\left(\tau_0(z)\cdot[1 - \sec\chi]\right),$$

$$\tau_0(z) = \sum_{N_2,O_2,O} \sigma^{abs}_{N_2,O_2,O}\cdot\left[\frac{R_0 T_n}{M_{N_2,O_2,O}\,g} n_{N_2,O_2,O}(z)\right],$$

$$\sigma^{abs}_{O_2} = 2\cdot10^{-17}\,,\ \text{см}^2;\quad \sigma^{abs}_{N_2} = 1.5\cdot10^{-17}\,,\ \text{см}^2;\quad \sigma^{abs}_{O} = 10^{-17}\,,\ \text{см}^2;$$

$$P_0 = 2.4\cdot10^{-7}\cdot n_O\cdot[1 + 2.8\cdot10^{-2}\cdot(I_0 - 80)]\,,\ \text{см}^{-3}\cdot\text{сек}^{-1}.$$

$$k_i = 1.2\cdot10^{-12}\cdot n_{N_2} + 2.1\cdot10^{-11}\cdot n_{O_2}\,,\ \text{сек}^{-1},$$

$$D_a = 3\cdot10^{17}\cdot T_P/(n_O\sqrt{T_R})\,,\ \text{см}^2\cdot\text{сек}^{-1},$$

$$T_P = \frac{1}{2}(T_e + T_i),\quad T_R = \frac{1}{2}(T_n + T_i),$$

$$H = \frac{2kT_p}{m_i g},$$

$$m_i = 10^{-26}\,\text{кг},\quad k = 1.38\cdot10^{-19}\,\text{кг}\cdot\text{см}^2\cdot\text{сек}^{-2}\cdot\text{К}^{-1},$$

$$g = 980\,\text{см}\cdot\text{сек}^{-2}.$$

Зенитный угол солнца χ — параметрически связывает решение с географическим положением: $\cos(\chi) = \sin(\phi)\cdot\sin(\delta) - \cos(\phi)\cdot\cos(\delta)\cdot\cos(\omega t)$, $(\delta) = (23.5°)\cdot sin(2\pi\cdot(d - 80)/365)$. Здесь ω — угловая скорость вращения Земли, в реализации модели $\omega = 0.00007292115078$ (см. [4]), t — время, отсчитываемое от местной полночи, ϕ — географическая широта (в реализации модели взята равной $55°$ с. ш.), d — склонение Солнца, где d — номер дня, считая от начала года (в реализации модели $d = 1$).

ёКонцентрация нейтралов:

$$n_{O_2,N_2,O} = n_{O_2,N_2,O}(z_0)\cdot\exp\left(-\frac{M_{O_2,N_2,O}\cdot g}{R_0 T_n}(z - z_0)\right),$$

$$z_0 = 14000000\,\text{см},$$

$$n_{O_2}(z_0) = 5.6\cdot10^9\cdot[1 - 1.14\cdot10^{-2}\cdot(I_0 - 80)]\,\text{см}^{-3},$$

$$n_O(z_0) = 2.8\cdot10^{10}\cdot[1 - 0.46\cdot10^{-2}\cdot(I_0 - 80)]\,\text{см}^{-3},$$

$$n_{N_2}(z_0) = 5.2\cdot10^{10}\cdot[1 + 0.48\cdot10^{-2}\cdot(I_0 - 80)]\,\text{см}^{-3}.$$

Температура, диффузионные формулы:

$$T_{i,n,e} = T_{i\infty,n\infty,e\infty} - (T_{i\infty,n\infty,e\infty} - T_0)\exp\left(-s_{i,n,e}(z - z_0)\right),$$
$$s = \frac{g}{RT_{i\infty,n\infty,e\infty}},$$
$$T_0 = 200\,\text{К}, \quad z_0 = 12000000\,\text{см}.$$

Экзосферная температура:

$$T_{n\infty} = 800 \cdot (1 + 5 \cdot (I_0 - 80))\,\text{К},$$
$$T_{i\infty} = 950 \cdot (1 + 5 \cdot (I_0 - 80))\,\text{К},$$
$$T_{e\infty} = 2200 \cdot (1 + 8.5 \cdot (I_0 - 80))\,\text{К}.$$

Используемые константы:

$$R = R_0/M_{air} = 2870000\,\text{см}^2 \cdot \text{сек}^{-2} \cdot \text{К}^{-1},$$
$$R_0 = 83100\,\text{см}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{сек}^{-2} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1},$$
$$M_{O_2} = 0.032\ \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}, \quad M_{N_2} = 0.028\ \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}, \quad M_O = 0.016\ \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}.$$

Была выбрана равномерная сетка с шагом по высоте Δz и шагом по времени Δt. Выбиралась схема со вторым порядком аппроксимации по z и первым по t. Получившееся дискретное уравнение решалось методом прогонки.

Приведем результаты численных экспериментов. Исследовалась зависимость от параметров t, I_0 и F_b. Интервал высоты принимался от $h_0 = 120$ км до $h_1 = 500$ км. Начальное приближение выбиралось следующим $\Phi_j^0 = 2 \cdot 10^5$, где j пробегает от 0 до $J + 1$.

Графики, изображенные на рис.1 и рис.2, построены при фиксированных $I_0 = 80$ и $F_b = 0$. Время t изменяется от 0 до 86400 сек (расчет на сутки).

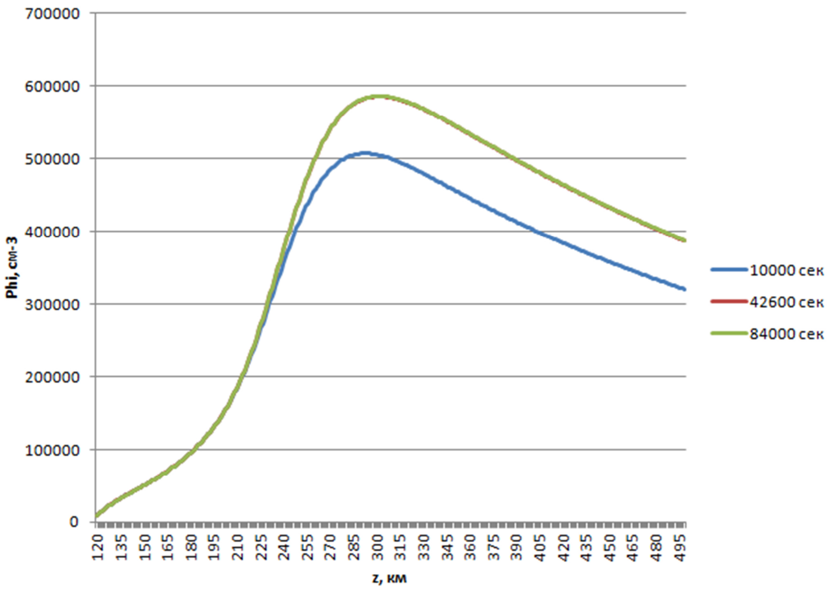

Рис. 1. Зависимость концентрации электронов от высоты для трех моментов времени.

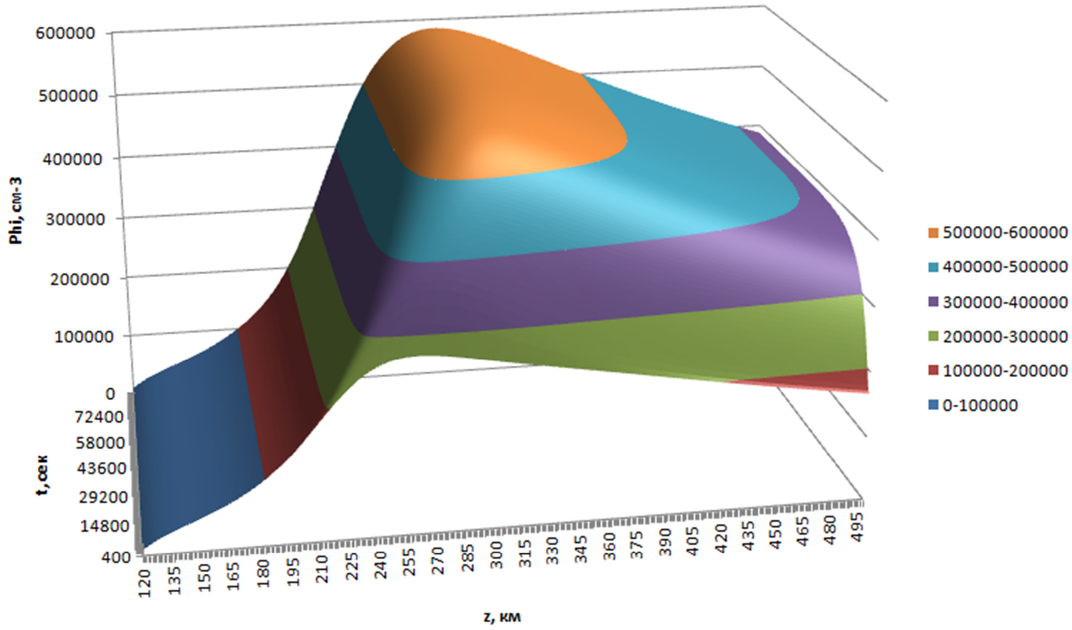

Рис.2. Зависимость концентрации электронов от высоты в течении суток.

График синего цвета имеет меньший максимум в сравнении с графиком красного цвета. Это связано с выбором начального условия.

Теперь фиксируем время t, положим его равным 4000 сек. F_b также будет фиксирован. На рисунке 3 параметр I_0 изменяется от 70 до 220 с шагом 10.

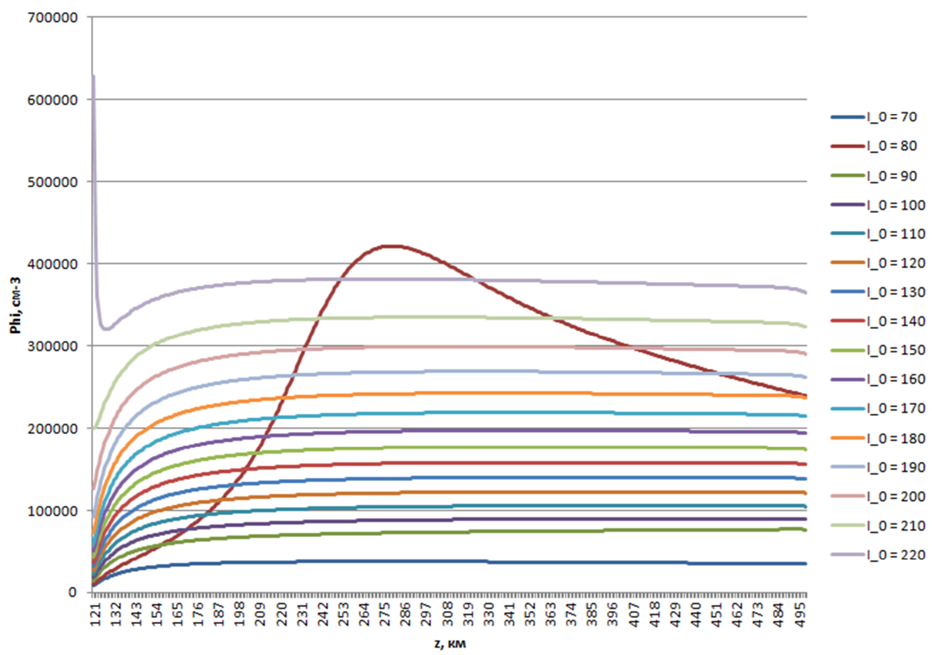

Рис. 3. Зависимость концентрации электронов от высоты с различным I_0 при $F_b = 0$.

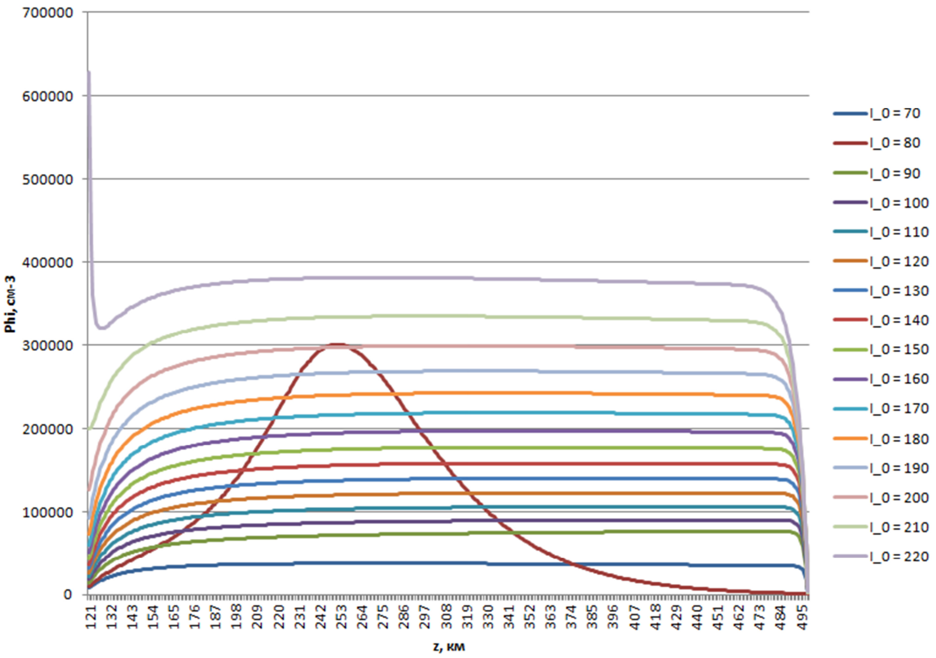

Рис. 4. Зависимость концентрации электронов от высоты с различным $\boldsymbol{I_0}$ при $\boldsymbol{F_b = -1000000}$.

На рисунке 5 и рисунке 6 параметр I_0 изменяется от 79.96 до 80.2 с шагом 0.02.

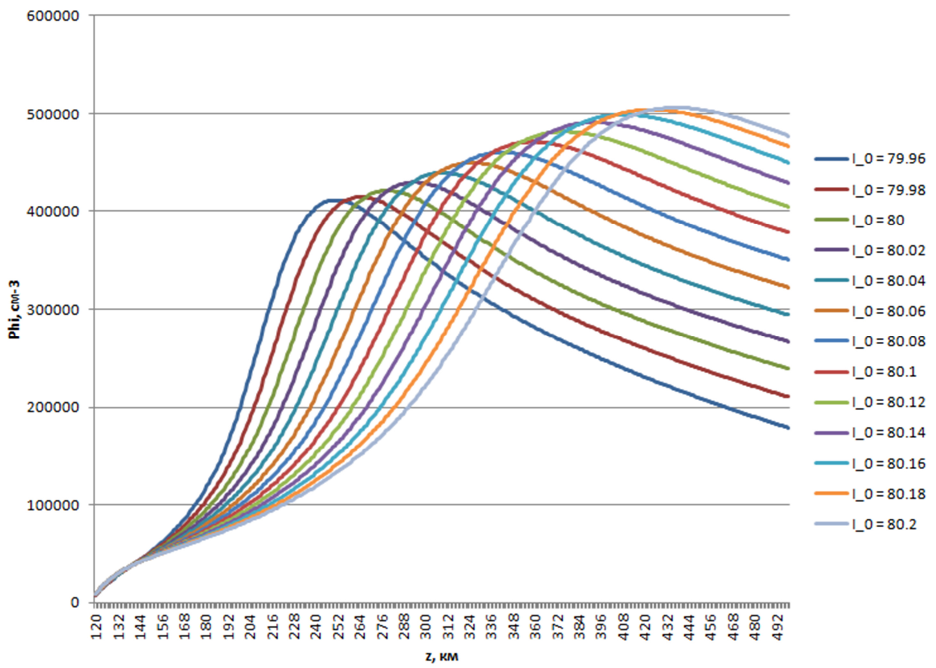

Рис. 5. Зависимость концентрации электронов от высоты с различным $\boldsymbol{I_0}$ при $\boldsymbol{F_b = 0}$.

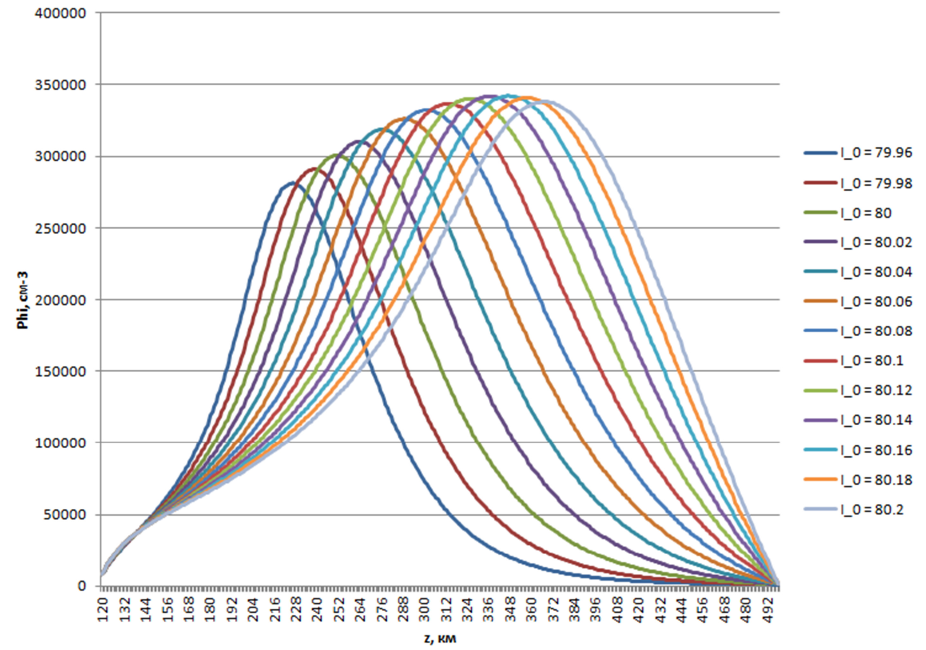

Рис. 6. Зависимость концентрации электронов от высоты с различным $\boldsymbol{I_0}$ при $\boldsymbol{F_b = -1000000}$.

Таким образом решение существенно зависит от I_0 на всем участке графика. Зависимость от F_b видна на верхней границе при «больших» I_0. При I_0 близких к 80, параметр F_b влияет на график в целом.

Для сравнения с рис. 5 и рис. 6 на рис. 7 приведен расчет по модели из [6]:

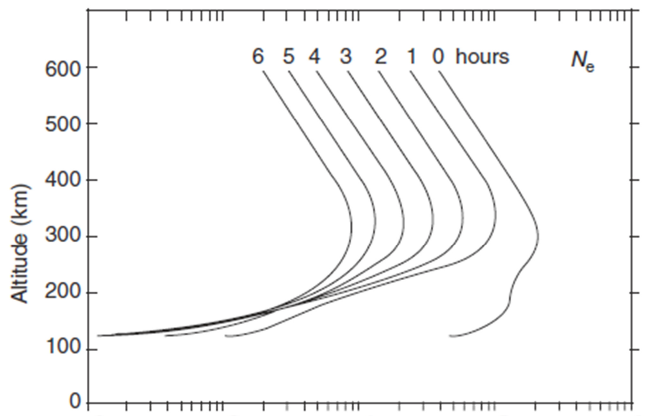

Рис. 7. Рассчитанные профили концентрации электронов в выбранные моменты времени.

При I_0 близких к 80 в модели из данной работы получаются схожие результаты. Таким образом, можно сделать вывод, что модель адекватно воспроизводит профили концентрации электронов в ионосфере и может быть использована для дальнейших расчетов в задаче вариационной ассимиляции данных в ионосфере.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе сформулирован класс обратных задач в ионосфере. Очевидно, что набор таких задач более широк, чем рассмотренные выше. Ясно также, что для построения условий замыкания в них необходимы специализированные базы данных измерений в ионосфере и не только интегрального характера (типа ПЭС), но и пространственно-распределенные. Однако построение таких баз требует специальных подходов интерполяции, экстраполяции, возможно построения «псевдо-данных», которые затем также могут быть ассимилированы в ту или иную математическую модель электронов или ионов. Без деятельности в этой научной области трудно надеяться на значительные успехи в области обратных задач, задач управления и ассимиляции данных в ионосфере.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект 17-17-01305)

ЛИТЕРАТУРА

1. Брюнелли Б. Е.,.Намгаладзе А. А . Физика ионосферы. М.: Наука, 1988. – 209 с.
2. Куницын В. Е., Терещенко Д. Е, Андреева Е. С. Радиотомография ионосферы. – М.: Физматлит, 2007. –150 с.
3. Соломенцев Д. В. Ансамблевая ассимиляционная модель ионосферы. – Диссертация кандидата Физико-математических наук, М.: 2013.
4. Агошков В. И. Избранные труды, том I. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. – М.: ИВМ РАН, 2016. – 160 с.
5. Ostanin P. A., Kulyamin D. V., Dymnikov V. P. Numerical modelling of the earth's ionosphere f region // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, 2017, –Vol. 96, No. 1. C. 012011(1)–012011(11), doi:10.1088/1755-1315/96/1/012011
6. Robert W. Schunk, Andrew F. Nagy. Ionospheres. Physics, Plasma Physics, and Chemistry – Cambridge University Press, 2009. – P. 315.

ON A PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELLING AND A PROBLEM OF VARIATION DATA ASSIMILATION IN THE IONOSPHERE

V. I. Agoshkov, E. I. Parmuzin, G. A. Balyberdin

The class of the inverse problem in the theory of an ionosphere is formulated and the method of their solution, on the basis of variation data assimilation of total electron content (TEC) is studied.

KEYWORDS: IONOSPHERE MATHEMATICAL MODEL, PERTURBATION METHOD, VARIATIONAL DATA ASSIMILATION